



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI



MINISTERUL EDUCAȚIEI

CONCURSUL NAȚIONAL  
DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ  
10 martie 2024



FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Clasa a XII-a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

### 1. feladat

Adott egy  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény amelyre létezik egy  $T \in \mathbb{R}^*$  úgy, hogy  $f(x + T) = f(x)$ ,  $(\forall)x \in \mathbb{R}$  és a  $G = \{T \in \mathbb{R} | f(x + T) = f(x), (\forall)x \in \mathbb{R}\}$  halmaz.

- Igazold, hogy a valós számok összeadása a  $G$  halmazon értelmezett művelet.
- Bizonyítsd be, hogy a  $(G, +)$  Abel-csoport.
- Határozd meg a  $G$  csoportot, ha az  $f$  függvény  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \{x\}$ , az  $x$  valós szám törtrésze.

### 2. feladat

- Legyen  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , ahol  $f, g$  az  $[a, b]$  intervallumon folytonos függvények és  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$ .  
Igazold, hogy  $(\exists) c \in [a, b]$  úgy, hogy  $f(c) = g(c)$ .
- Adjatok példát olyan  $f$  és  $g$  függvényekre, amelyek kielégítik az a) pontban leírt feltételeket. A b) pontban leírt függvények esetén számoljátok ki a  $c$  szám értékét.

### 3. feladat

Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin^4 x$  függvény.

- Fejezze ki a  $\sin^2 x$  értékét a  $\cos 2x$  függvényében és a  $\sin^4 x$  értékét a  $\cos 2x$  és  $\cos 4x$  függvényében.
- Számold ki az  $f$  függvény primitívjeit az  $\mathbb{R}$ -en.
- Számold ki a  $\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(x)dx$  értékét.

### 4. feladat

Kódnak nevezzük az  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  matrixot ahol  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ . Jelöljük  $G$ -vel ezen kódok halmazát és

$H$ -val azon kódok halmazát melyek  $G$  összes kódjával kommutativak.

- Igazold, hogy két kód szorzata is egy kód.
- Bizonyítsd be, hogy  $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{Q} \right\}$ .
- Igazold, hogy a  $(H, \cdot)$  egy Abel-féle csoport, amely nem izomorf a  $(\mathbb{Q}_+^*, \cdot)$  csoporttal.

#### Notă:

Timp de lucru 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.