MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2024

Clasa a XI–a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

1. feladat

Kódnak nevezzünk egy olyan $\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ alakú mátrixot, ahol $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

a) Igazold, hogy két kód szorzata is egy kód.
b) Ha X egy kód igazold, hogy az X^{-1} is egy kód.
c) Adottak az $A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ mátrixok és az $(X_n)_{n\geq 1}$, kódsorozatot úgy határozzuk meg, hogy: $X_1 = I_3$; $X_{n+1} \in \{X_n + A, X_n + B, X_n + C\}$, minden $n \geq 1$ esetén.

Létezik olyan $(X_n)_{n\geq 1}$ sorozat amely az $\begin{pmatrix}1 & 2022 & 2023\\ 0 & 1 & 2024\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ kódot tartalmazza? És az $\begin{pmatrix}1 & 2023 & 2024\\ 0 & 1 & 2025\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ kódot?

2. feladat

Adottak az $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $I_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ mátrixok.

a) Igazold, hogy $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2 = O_2$.
b) Ha $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ és létezik $n \in \mathbb{N}^*$ úgy, hogy $A^n = O_2$, akkor $A^2 = O_2$.
c) Legyen $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ és $X^{2024} - X^{2023} = O_2$, bizonyítsa be, hogy $X^3 - X^2 = O_2$.

3. feladat

Egy $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ függvényt *érdekesnek* nevezzük ha $f(x) \cdot f\big(f(x)\big) = 1,\ \forall x \in (0, \infty)$.
$\mathcal{F}$-fel jelöljük az *érdekes függvények* halmazát.

a) Igazold, hogy $\mathcal{F}$ nemüres halmaz.
b) Határozd meg az *érdekes* szürjektív függvényeket.
c) Legyen $f \in \mathcal{F}$ egy folytonos függvény. Ha $f(2024) = \frac{1}{2024}$, határozd meg az $f(2023)$.

4. Feladat

Az $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ függvénnyel modellezett fizikai jelenséget *a-kiegyensúlyozottnak* nevezzük, a>0, ha létezik a $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x+a)}{f(x)}$ határérték és ennek értéke egyenlő 1-gyel.

a) Igazold, hogy az $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt{3x+2} - \sqrt{3x}$ függvénnyel modelezett jelenség *1-kiegyensúlyozott*.
b) Létezik olyan $a > 0$ úgy, hogy az $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty), f(x) = 3^x - 2^x$ függvénnyel modelezett jelenség *a-kiegyensúlyozott* legyen?
c) Tudjuk, hogy az $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, monoton növekvő függvénnyel modelezett fizikai jelenség *1-kiegyensúlyozott*. Igazold, hogy:
   1. a jelenség *n-kiegyensúlyozott*, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.
   2. a jelenség *a-kiegyensúlyozott*, bármely $a \in (0, +\infty)$ esetén.

Notă:
Timp de lucru 3 ore;
Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.