VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
megyei szakasz, 2024. február 3.

X. osztály

1. feladat (10 pont). (a) Bizonyítsd a következő egyenlőtlenséget

$$\frac{\lg 2+\lg 20+\lg 200}{3} \leq \lg \frac{2+200}{2}\ !$$

(b) Ha $(b_n)_{n\geq 1}$ olyan mértani haladvány, amelyre $b_n \geq 1$ minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, akkor bizonyítsd, hogy

$$\frac{\lg b_1+\lg b_2+\cdots+\lg b_n}{n} \leq \lg \frac{b_1+b_n}{2}\ ,$$

minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

Milyen esetben áll fenn az egyenlőség?

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

(a) Ha kiszámítjuk az egyenlőtlenség mindkét oldalát, akkor a következő eredményekhez jutunk:

$$\frac{\lg 2+\lg 20+\lg 200}{3}=\frac{\lg 2+\lg 2+\lg 10+\lg 2+\lg 100}{3}=\frac{3\cdot \lg 2+3}{3}=\lg 2+1<2,$$ **(1 pont)**

illetve $\lg \dfrac{2+200}{2}=\lg 101>\lg 100=2.$ **(1 pont)**

Tehát a megadott egyenlőtlenség $\dfrac{\lg 2+\lg 20+\lg 200}{3}<2<\lg \dfrac{2+200}{2}$ igaz.

(b) Mivel a $(b_n)_{n\geq 1}$ mértani haladvány, ezért a tagjai felírhatóak, mint $b_2=b_1\cdot q$, $b_3=b_1\cdot q^2$, $b_4=b_1\cdot q^3$, ..., $b_n=b_1\cdot q^{n-1}$. **(1 pont)**

Így az egyenlőtlenségünk bal oldala a következőképpen alakítható

$$\begin{aligned}\frac{\lg b_1+\lg b_2+\lg b_3+\cdots+\lg b_n}{n}&=\frac{\lg b_1+\lg (b_1\cdot q)+\lg (b_1\cdot q^2)+\cdots+\lg (b_1\cdot q^{n-1})}{n}\\&=\frac{\lg (b_1\cdot b_1\cdot q\cdot b_1\cdot q^2\cdots b_1\cdot q^{n-1})}{n}\end{aligned}$$ **(1 pont)**

$$\begin{aligned}&=\frac{\lg \left(b_1^n\cdot q^{\frac{(n-1)n}{2}}\right)}{n}=\frac{\lg \left(b_1\cdot q^{\frac{n-1}{2}}\right)^n}{n}\\&=\frac{n\cdot \lg \left(b_1\cdot q^{\frac{n-1}{2}}\right)}{n}=\lg \left(b_1\cdot q^{\frac{n-1}{2}}\right).\end{aligned}$$ **(1 pont)**

Vagyis a bizonyítandó egyenlőtlenség $\lg \left(b_1\cdot q^{\frac{n-1}{2}}\right)\leq \lg \dfrac{b_1+b_n}{2}$, $\forall n\geq 1$.

$$\begin{aligned}
&\lg\left(b_1\cdot q^{\frac{n-1}{2}}\right)\le \lg\frac{b_1+b_n}{2}\\
\iff &\lg\left(b_1\cdot q^{\frac{n-1}{2}}\right)\le \lg\frac{b_1+b_1\cdot q^{n-1}}{2}\\
\iff &\lg\left(b_1\cdot q^{\frac{n-1}{2}}\right)\le \lg\frac{b_1(1+q^{n-1})}{2}\\
\iff &b_1\cdot q^{\frac{n-1}{2}}\le \frac{b_1(1+q^{n-1})}{2}\\
\iff &2\cdot q^{\frac{n-1}{2}}\le 1+q^{n-1}\\
\iff &0\le q^{n-1}-2\cdot q^{\frac{n-1}{2}}+1\\
\iff &0\le (q^{\frac{n-1}{2}}-1)^2
\end{aligned}$$

(**1 pont**)

Ez pedig nyilvánvalóan igaz minden $n\geq 1$ természetes szám esetén. (**2 pont**)

Az egyenlőség $q=1$ esetben érhető el. (**1 pont**)

■

2. feladat (10 pont)**.** Az $(S_n)_{n\geq 1}$ valós számsorozat általános tagja

$$S_n=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}+\cdots+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4n+2\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}},\ \forall n\geq 1.$$

(a) Igazold, hogy $S_n\leq\sqrt{2n+1}$, minden $n\geq 1$ esetén!

(b) Határozd meg azokat az $n\in\mathbb{N}^*$ értékeket, amelyekre $\sqrt{2}\cdot S_n$ racionális szám lesz!

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

(a) Ha kiindulunk az utolsó tag nevezőjében szereplő kifejezésből, akkor észrevesszük, hogy

$$4n+2\sqrt{(2n-1)(2n+1)}=2n+1+2n-1+2\sqrt{(2n+1)(2n-1)}=(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})^2,$$

így a kifejezés átalakítható a következő módon:

$$\sqrt{4+2\sqrt{4n^2-1}}=\sqrt{(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})^2}=\left|\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}\right|=\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}$$

(**2 pont**)

Ez alapján

$$\begin{aligned}
S_n&=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{1}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}\\
&=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}\right).
\end{aligned}$$

(1 pont)

Ha a törteket gyöktelenítjük, akkor $S_n = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} + \cdots + \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2}\right)$,

tehát $S_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\sqrt{2n+1} - 1)$. **(2 pont)**

Ekkor, mivel $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, ezért $S_n < \sqrt{2n+1} - 1 < \sqrt{2n+1}$. **(1 pont)**

(b) Az előző alpont eredménye alapján $\sqrt{2} \cdot S_n = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\sqrt{2n+1} - 1) = \sqrt{2n+1} - 1$.

Így $S_n \in \mathbb{Q} \iff \sqrt{2n+1} - 1 \in \mathbb{Q} \iff \sqrt{2n+1} \in \mathbb{Q}$. Ha $\sqrt{2n+1}$ racionális, akkor $\frac{p}{q}$ alakban írható, ahol p, q természetes számok, relatív prímek, illetve $q \neq 0$.

$$\sqrt{2n+1} = \frac{p}{q} \iff 2n+1 = \frac{p^2}{q^2} \iff 2n = \frac{p^2}{q^2} - 1 \in \mathbb{N}$$

Tehát $\frac{p^2}{q^2} \in \mathbb{N} \iff q^2 \mid p^2$, de mivel p és q relatív prímek, ezért $q \mid p$, vagyis $\sqrt{2n+1} = \frac{p}{q} \in \mathbb{N}$.
(1 pont)

Ekkor $\sqrt{2n+1} \in \mathbb{N} \iff 2n+1 = k^2$, ahol $k \in \mathbb{N}^*$, vagyis $n = \frac{k^2-1}{2} = \frac{(k-1)(k+1)}{2} \in \mathbb{N}$,
ahonnan $k = 2p+1$ alakú, ahol $p \in \mathbb{N}$. **(1 pont)**

Tehát $n = \frac{2p \cdot (2p+2)}{2}$, vagyis minden $n = 2p \cdot (p+1)$ alakú természetes szám megoldás.

(1 pont)

■

3. feladat (10 pont)**.** Adott az $a > 0$ valós szám. Igazold, hogy ha $z \in \mathbb{C}$ és $\mathrm{Re}(z) > a$, akkor

$$\left|\frac{1}{z} - \frac{2}{a}\right| < \frac{2}{a} \ !$$

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Induljunk ki a bizonyítandó egyenlőtlenségből és végezzük a következő ekvivalens átalakításokat:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{z}-\frac{2}{a}\right| < \frac{2}{a} \\
\iff &\left|\frac{a-2z}{z\cdot a}\right| < \frac{2}{a} && \textbf{(1 pont)} \\
\iff &\frac{|a-2z|}{|z\cdot a|} < \frac{2}{a} \\
\iff &\frac{|a-2z|}{|z|a} < \frac{2}{a} && \textbf{(1 pont)} \\
\iff &|a-2z| < 2|z|\,.
\end{aligned}$$

Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldala pozitív valós szám, így négyzetre emelhetjük mindkét oldalt.

$$\begin{aligned}
|a-2z|^2 &< 4|z|^2 && \textbf{(1 pont)} \\
(a-2z)\overline{(a-2\cdot z)} &< 4\cdot z\cdot \overline{z} && \textbf{(1 pont)} \\
(a-2z)(a-2\cdot \overline{z}) &< 4\cdot z\cdot \overline{z} \\
a^2-2az-2a\overline{z}+4\cdot z\cdot\overline{z} &< 4\cdot z\cdot \overline{z} && \textbf{(1 pont)} \\
a^2-2\cdot a(z+\overline{z}) &< 0 \\
a^2 &< 2\cdot a(z+\overline{z}) && \textbf{(1 pont)} \\
a^2 &< 2\cdot a\cdot 2\cdot \mathrm{Re}(z) \\
a^2 &< 4\cdot a\cdot \mathrm{Re}(z) \\
a &< 4\cdot \mathrm{Re}(z) && \textbf{(1 pont)}
\end{aligned}$$

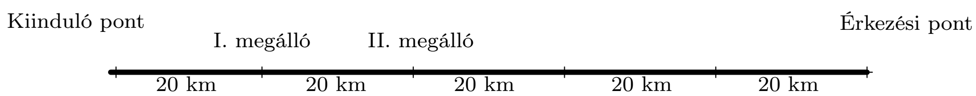
Az a egy rögzített, pozitív érték ezért $a < 4a$, illetve feltétel alapján $0 < a < \mathrm{Re}(z)$, tehát a $4a < 4\cdot\mathrm{Re}(z)$ egyenlőtlenség igaz, amiből az $a < 4a < \mathrm{Re}(z) \Rightarrow a < 4\cdot\mathrm{Re}(z)$ szintén igaz. Tehát ekvivalens átalakításokat végezve egy igaz kijelentéshez jutottunk, vagyis a feltételezésünk - a bizonyítandó állítás - igaz. **(2 pont)**

∎

4. feladat (10 pont)**.** Ali a szülőfalujától távol dolgozik. Munkahelye és szüleinek lakhelye között egy 100 km széles sivatag terül el. Ali meg akarja látogatni a szüleit. Kérdezősködik, számolgat, míg kiderül, hogy a sivatagban naponta 20 km-t tud megtenni, és egyszerre csak háromnapi élelmet és víztartalékot tud magával vinni. Az úton 20 kilométerenként ládák vannak, amelyekbe Ali élelem és víztartalékot tud elhelyezni. Legkevesebb hány nap alatt tud Ali átjutni a sivatagon?

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Az alábbi ábrán látható a 100 km-es út, lebontva 20 km-es szakaszokra, mivel Ali egy nap ennyi távolságot tud megtenni. A bejelölt pontoknál lévő ládákban tud Ali tartalékolni.



Ali 15 nap alatt át tud jutni a sivatagon, a következő módon:

- Elmegy az első megállóig, letesz egynapi tartalékot, visszamegy a kiindulási ponthoz - **2 nap**

- Elmegy az első megállóig, letesz egynapi tartalékot, visszamegy a kiindulási ponthoz - **2 nap**
- Elmegy az első megállóig - felvesz egynapi tartalékot - elmegy a második megállóig - letesz egynapi tartalékot - visszamegy az első megállóig - felvesz egynapi tartalékot - visszamegy a kiindulási ponthoz. - **4 nap**
- Elmegy az első megállóig, letesz egynapi tartalékot, visszamegy a kiindulási ponthoz - **2 nap**

(**4 pont**)

Ekkor Ali útnak tud indulni háromnapi tartalékkal. Az első megállóig elfogyaszt egynapi adagot, de ott felveszi a tartalékot, így ismét háromnapi élelme és vize van. A második megállóig elfogyaszt egynapi adagot, de ott felveszi a tartalékot, így ismét háromnapi élelme és vize van. Így innen meg tudja tenni a maradék útszakaszt az érkezési pontig, az út pedig **5 napba** telik.

Ali utazása összesen $2+2+4+2+5 = 15$ nap. (**1 pont**)

Bizonyítsuk, hogy Ali nem juthat át a sivatagon kevesebb, mint 15 nap alatt!

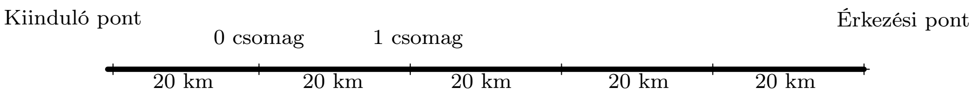
Mivel Ali egyszerre csak háromnapi élelmet és víztartalékot tud magával vinni, ezért csak akkor tud odaérni az érkezési ponthoz, hogyha a második megállóból háromnapi tartalékkal indul el, ehhez **kell legyen tartalékcsomag a második megállóban**. (**1 pont**)

Minden alkalommal, amikor tartalékcsomagot tesz le valahol, visszafele is minden útszakaszon elfogyaszt egy-egy napi élelmet és vizet. Ahhoz, hogy a második megállóban létesítsen tartalékot el kell jutnia odáig - ez 2 nap - illetve vissza is kell jönnie - ez még 2 nap, így ez az út 4 nap. Valamint menet fel kell vennie egy csomagot az első megállóból, hogy a másodikban tudjon letenni és vissza is érjen az elsőhöz. Végül pedig, hogy innen vissza jusson a kiindulási ponthoz, szüksége van még egy csomag tartalékra.

Tehát ehhez **kell lennie két tartaléknak az első megállóban** is. (**1 pont**)

Ahhoz, hogy az első megállóban létesítsen tartalékot el kell jutnia odáig - ez 1 nap - illetve vissza is kell jönnie - ez még egy nap - így egy alkalommal, 2 nap alatt maximum egynapi tartalékot tud letenni. Ezt meg kell ismételnie kétszer.

Ez alapján legalább 8 nap szükséges ahhoz, hogy a következő kofigurációt elérje:



(**1 pont**)

Ahhoz, hogy Ali átjusson a sivatagon, valamelyik megállóban kell tartalékoljon még egyet.

Ha a másodikban szeretne, az ismét 6 napba telne, így $8+6 = 14$ napnál tartana, tehát átjutni több időbe telne, mint 15 nap.

Ezek szerint az első megállóban fog tartalékolni, ami ismét 2 napba telik, így leghamarabb a $8+2 = 10$-edik napon indulhat útnak, az út 5 nap, vagyis az átjutáshoz szükséges **legalább 15 nap**. (**1 pont**)

Megjegyzés. Bármilyen más, helyes gondolatmenet 15 nap megoldással szintén 10 pontot ér, ha bizonyította, hogy kevesebb nap alatt nem lehetséges átjutni. Bizonyítás nélkül maximum 5+1 pont adható.

■