VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
megyei szakasz, 2024. február 3.

IX. osztály

1. feladat (10 pont). a) Határozd meg, hogy hány $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ számpár teljesíti az

$$a^2 + b^2 + 2 \leq 2a + 6b$$

egyenlőtlenséget!

b) Ha $x \in (2, 3)$ és $y \in (3, 4)$ valós számok, akkor igazold, hogy $\dfrac{(2x-5)(y-3)}{x-2} < 1$.

Matlap 1/2024 A:4863

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) $a^2 + b^2 + 2 \leq 2a + 6b \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-3)^2 \leq 8$. **(1 pont)**

$\Rightarrow \left((a-1)^2, (b-3)^2\right) \in \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (0,4), (4,0), (1,4), (4,1), (4,4)\}$ **(1 pont)**

$\Rightarrow \left((a-1), (b-3)\right) \in \{(0,0), (0,\pm 1), (\pm 1, 0), (\pm 1, \pm 1), (0, \pm 2), (\pm 2, 0), (\pm 1, \pm 2),$
$(\pm 2, \pm 1), (\pm 2, \pm 2)\}$ **(1 pont)**

Tehát összesen $1 + 2 + 2 + 4 + 2 + 2 + 4 + 4 + 4 = 25$ ilyen számpár van. **(1 pont)**

b) Mivel $x > 2$, következik, hogy $x - 2 > 0$, tehát $\dfrac{(2x-5)(y-3)}{x-2} < 1 \Leftrightarrow (2x-5)(y-3) < x - 2$

(1 pont)

$\Leftrightarrow 2xy - 5y - 6x + 15 < x - 2 \Leftrightarrow 2xy - 5y - 7x + 17 \leq 0$

$\Leftrightarrow xy - \dfrac{5}{2}y - \dfrac{7}{2}x + \dfrac{17}{2} < 0 \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{5}{2}\right)\left(y - \dfrac{7}{2}\right) < \dfrac{1}{4}$ **(2 pont)**

Mivel $x \in (2, 3)$ és $y \in (3, 4)$, következik, hogy $x - \dfrac{5}{2} \in \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ és $y - \dfrac{7}{2} \in \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$,

tehát $\left(x - \dfrac{5}{2}\right)\left(y - \dfrac{7}{2}\right) < \dfrac{1}{4}$.

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, következik, hogy az eredeti állítás igaz. **(2 pont)**

Második megoldás

Mivel $x > 2$, következik, hogy $x - 2 > 0$, tehát $\dfrac{(2x-5)(y-3)}{x-2} < 1 \Leftrightarrow (2x-5)(y-3) < x - 2$

(**1 pont**)

$\Leftrightarrow (2x-5)(2y-6) < 2x-4 \Leftrightarrow (2x-5)(2y-6) < 2x-5+1$

$\Leftrightarrow (2x-5)(2y-7) < 1$ (**2 pont**)

Mivel $x \in (2,3)$ és $y \in (3,4)$, következik, hogy $2x-5 \in (-1,1)$ és $2y-7 \in (-1,1)$, tehát $\Leftrightarrow (2x-5)(2y-7) < 1$.

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, következik, hogy az eredeti állítás igaz. (**2 pont**)

Harmadik megoldás

Mivel $y \in (3,4)$, következik, hogy $y-3 \in (0,1)$, így elégséges bizonyítani, hogy $\frac{2x-5}{x-2} < 1$. (**2 pont**)

Mivel $x > 2$, következik, hogy $x-2 > 0$, tehát $\frac{2x-5}{x-2} < 1 \Leftrightarrow 2x-5 < x-2 \Leftrightarrow x < 3$, ami igaz. Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, következik, hogy az eredeti állítás igaz.

(**3 pont**)

■

2. feladat (10 pont)**.** Bálint felírt a táblára 3 egymásután következő nullától különböző természetes számot. Dani észrevette, hogy a három szám közül az egyik prímszám, egy másik négyzetszám, a harmadik pedig köbszám (nem feltétlenül ebben sorrendben). Melyik három szám szerepelhetett a táblán? Határozd meg az összes lehetőséget!

Barta-Zágoni Csongor, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

Legyen a három szám p, k^2, n^3, ahol $p, k, n \in \mathbb{N}^*$, p prím.

Ha a négyzetszám a prímszám rákövetkezője, akkor $p+1 = k^2$ és $p = k^2 - 1 = (k-1)(k+1)$ prímszám, tehát $k = 2$. Így a prímszám 3, a négyzetszám 4. Ez a sorozat nem felel meg, mert sem 2 sem 5 nem köbszám. (**2 pont**)

Ha a köbszám a prímszám rákövetkezője, akkor $p+1 = n^3$ és $p = n^3 - 1 = (n-1)(n^2+n+1)$ prímszám, tehát $n = 2$. Így a prímszám 7, a köbszám 8. Ez abban az esetben felel meg, ha a négyzetszám 9. (**2 pont**)

Ha a prímszám egyiknek sem a megelőzője, azaz a legnagyobb, akkor két sorrend lehetséges: k^2, n^3, p vagy n^3, k^2, p.

Az első esetben $p = n^3 + 1 = (n+1)(n^2 - n + 1)$, ami csak akkor lehet prím, ha $n^2 - n + 1 = 1$, azaz $n = 1$ (mert $n > 0$). Ekkor $p = 2$, $n = 1$ és $k = 0$ kellene legyen, de $k \in \mathbb{N}^*$, tehát ez nem lehetséges. (**2 pont**)

A második esetben $k^2 = n^3 + 1 \Leftrightarrow (k-1)(k+1) = n^3$. Ekkor ha $k-1$ és $k+1$ legnagyobb közös osztója d, akkor $d \mid (k+1) - (k-1) = 2$, tehát $d = 1$ vagy $d = 2$.

Ha $d = 1$, akkor $k-1$ és $k+1$ is köbszám. Legyen $k+1 = a^3$ és $k-1 = b^3$, tehát $a^3 - b^3 = 2$. Mivel $a \geq b+1$, ezért $a^3 - b^3 \geq b^3 + 3b^2 + 3b + 1 - b^3 = 3b^2 + 3b + 1 \geq 7$, azaz nem lehet 2.

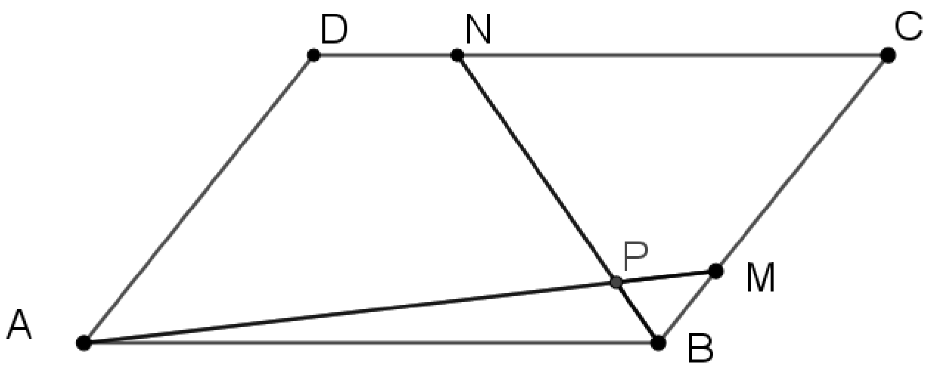
Ha $d = 2$, akkor n^3 páros és ekkor $p = n^3 + 2$ is páros, ami nem lehetséges, mert ekkor $p = 2$ és $n = 0 \notin \mathbb{N}^*$ (**2 pont**)

Tehát az egyetlen ilyen sorozat a $7, 8, 9$. (**1 pont**)

■

3. feladat (10 pont)**.** Jelölje M az $ABCD$ paralelogramma BC oldalának B ponthoz közelebbi harmadolópontját valamint N a DC oldal tetszőleges pontját. Az AM és BN egyenesek metszéspontja P. Igazold, hogy $\frac{PM}{AM} + \frac{3BP}{BN} = 1$. ***

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)



Legyen $\frac{DN}{DC} = a$, $\frac{PM}{AM} = x$ és $\frac{BP}{BN} = y$. Igazolni kell, hogy $x + 3y = 1$.

Ekkor $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ (**1 pont**)

$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + (1-a)\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} - (1-a)\overrightarrow{AB}$ (**1 pont**)

$\overrightarrow{PM} = x\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + \frac{x}{3}\overrightarrow{BC}$ (**2 pont**)

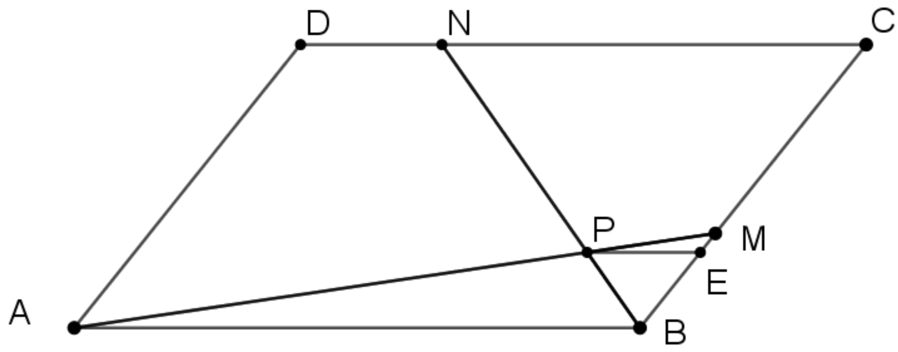
$\overrightarrow{BP} = y\overrightarrow{BN} = y\overrightarrow{BC} - y(1-a)\overrightarrow{AB}$ (**2 pont**)

$\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ (**1 pont**)

$\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PM} = (x - y + ay)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{x}{3} + y\right)\overrightarrow{BC}$

Tehát $x - y + ay = 0$ és $\frac{x}{3} + y = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x + 3y = 1$ (**2 pont**)

Második megoldás



A P ponton keresztül párhuzamost húzunk az AB-vel, ami a BC oldalt az E pontban metszi.
Az ABM háromszögben Thalész tételéből

$$\frac{PM}{AM} = \frac{ME}{BM} = \frac{BM - BE}{BM} = \frac{\frac{1}{3}BC - BE}{\frac{1}{3}BC} = \frac{BC - 3BE}{BC}$$ **(4 pont)**

A BNC háromszögben Thalész tételéből

$$\frac{BP}{BN} = \frac{BE}{BC}$$ **(3 pont)**

Tehát $\frac{PM}{AM} + \frac{3BP}{BN} = \frac{BC - 3BE}{BC} + \frac{3BE}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1$ **(2 pont)**

■

4. feladat (10 pont)**.** Egy 4×4 -es táblázat minden mezőjében kezdetben a 0 szám áll. Egy lépésben a táblázat két oldalszomszédos négyzetében lévő számokat 1-gyel növeljük. Megkaphatjuk-e ilyen lépésekkel az alábbi táblázatokat?

a)

1	2	4	5
7	8	10	12
11	13	15	17
18	19	20	21

b)

1	2	4	5
7	8	10	12
11	13	14	17
18	19	20	21

c)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

***

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Minden lépésben a táblázatban szereplő számok összege pontosan 2-vel nő. Kezdetben ez az összeg nulla, így minden lépés után a táblázatban szereplő számok összege páros szám lesz. Mivel az első táblázatban szereplő számok összege 183, ezért az a) táblázatot nem érhetjük el. **(3 pont)**

b) Az előző gondolatmenet itt nem hasznos, mivel a számok összege 182. Színezzük ki sakktábla-szerűen a táblázatot:

1	2	4	5
7	8	10	12
11	13	14	17
18	19	20	21

Tegyük fel, hogy megvalósítható a táblázat. Indulásból minden mezőben a 0 szám áll, tehát a szürke és a fehér mezőkön álló számok összege azonos. Két oldalszomszédos négyzet közül az egyik mindig fehér, a másik szürke, tehát minden lépésnél úgy a fehér mezőkön szereplő számok összege, mint a szürke mezőkön szereplő számok összege pontosan 1-gyel nő, tehát mindig egyenlő marad. Ebben a táblázatban a fehér mezőkön szereplő számok összege 92, a szürke mezők számainak összege 90, tehát nem valósítható meg a táblázat. (**3 pont**)

c) Ez a táblázat megvalósítható, szerkesszük meg.

Az alábbi lépésekkel a táblázatot 4 darab 2×2-es táblázatra osztva elérhető minden saroktáblázatban a következő:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline\end{array} \xrightarrow{\text{2 lépés}} \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}$$

(**1 pont**)

Ezután minden $(1, 2)$ szomszédos pár bármilyen egymásutáni számpárrá alakítható.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline\end{array} \xrightarrow{a-1 \text{ lépés}} \begin{array}{|c|c|}\hline a & a+1 \\ \hline\end{array}$$

(**1 pont**)

A fenti lépésekkel kialakítható a c) táblázat. (**1 pont**)

■