VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
megyei szakasz, 2024. február 3.

V. osztály

1. feladat (10 pont)**.** Egy esős délután négy barát együtt társasjátékozott. Összesen négy játszmát játszottak, minden játszma során egy valaki vesztett, hárman pedig nyertek. Minden játszma végén a vesztes, a saját vagyonából megkétszerezte a három nyertes vagyonát. A játék végére mindenki pontosan egyszer veszített, és mindenkinek 32 fabatkája lett. Mennyi pénze volt a játékosoknak külön-külön a játék kezdetekor?

Matlap 10/2023, A:4830

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Gondolkodjunk visszafelé!
A 4. játszma végén minden játékosnak 32 fabatkája volt, és tudjuk, hogy a vesztes játékos a saját vagyonából megduplázta a másik három játszótársa vagyonát. Így a 4. játszma elején, azaz a 3. játszma végén három játékosnak $32 : 2 = 16$ fabatkája, míg a vesztes játékosnak $32 + 3 \cdot 16 = 80$ fabatkája kellett legyen. **(2 pont)**
A 3. játszma végén egy másik játékos, az egyik 16 fabatka vagyonú kellett legyen a vesztes, így ő duplázta meg a másik három játékos vagyonát, akiknek így a 3. játszma kezdetén, vagyis a 2. játszma végén 8, 8, illetve 40 fabatkája kellett legyen, az aktuális vesztesnek pedig $16 + 8 + 8 + 40 = 72$ fabatkája. **(2 pont)**
A 2. játszma végén az egyik 8 fabatka vagyonú játékos veszített, így ő duplázta meg a többiek vagyonát, akiknek a játszma kezdetén 4, 20, illetve 36 fabatkája, neki pedig $8+4+20+36 = 68$ fabatkája volt. **(2 pont)**
Az első játszma végén a 4 fabatka vagyonú játékos veszített, és megduplázta a többiek vagyonát, akiknek a játszma kezdetén 10, 18, illetve 34 fabatkája, neki pedig $4 + 10 + 18 + 34 = 66$ fabatkája volt. **(2 pont)**
Tehát a játék kezdetekor a játékosoknak 10, 18, 34, illetve 66 fabatkája volt külön-külön. **(1 pont)**
■

2. feladat (10 pont)**.** a) Melyik az a legkisebb négyjegyű természetes szám, amelynek 42-vel való osztási maradéka 8, míg 43-mal való osztási maradéka 3?

b) Határozd meg a fenti tulajdonságokkal rendelkező legnagyobb négyjegyű természetes számot!

Simon József, Csíkszereda

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Ha n a keresett négyjegyű természetes szám, akkor a maradékos osztás tétele alapján egyrészt $n = 42k + 8$, másrészt $n = 43l + 3$, valamely k és l természetes számok esetén. **(2 pont)**
Az első összefüggés 43-szorosát, míg a második 42-szeresét véve kapjuk, hogy $43n = 1806k + 344$, illetve $42n = 1806l + 126$. **(2 pont)**
Ezeket kivonva egymásból $n = 1806(k - l) + 218$ alakú lesz. **(1 pont)**
Ez alapján a keresett szám $n = 1806p + 218$ alakú kell legyen, ahol p valamilyen természetes szám.

Az ilyen alakú számok közül $1806 + 218 = 2024$ a legkisebb négyjegyű természetes szám, (**1 pont**) továbbá $2024 = 48 \cdot 42 + 8 = 47 \cdot 43 + 3$, ezért 2024 a legkisebb olyan négyjegyű szám, melynek 42-vel való osztási maradéka 8, illetve 43-mal való osztási maradéka 3. (**1 pont**)

b) Az előző alpontban beláttuk, hogy ha $n = 42k + 8$ és $n = 43l + 3$ alakú egyszerre, akkor létezik $p = k - l$ úgy, hogy $n = 1806p + 218$ alakú. Ezek a számok közül a legnagyobb négyszámjegyű $n = 1806 \cdot 5 + 218 = 9248$. (**1 pont**)
Végül $9248 = 220 \cdot 42 + 8$ és $9248 = 215 \cdot 43 + 3$, ezért 9248 a legnagyobb olyan négyjegyű szám, amelynek 42-vel való osztási maradéka 8 és 43-mal való osztási maradéka 3. (**1 pont**)

■

Második megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a) Ha n a keresett négyjegyű természetes szám, akkor a maradékos osztás tétele alapján egyrészt $n = 42k + 8$, másrészt $n = 43l + 3$, valamely k és l természetes számok esetén. (**2 pont**)
Mivel $1000 = 23 \cdot 43 + 11$, ezért $1035 = 24 \cdot 43 + 3$ a legkisebb olyan négyjegyű szám, amelynek 43-mal való osztási maradéka 3. (**1 pont**)
Továbbá $1035 = 24 \cdot 42 + 27$. (**1 pont**)
Ha 1035-höz 43-mat hozzáadunk, akkor a 43-mal való osztási maradék nem változik, de a 42-vel való osztási maradék növekszik 1-gyel. A 27 után 50 a legkisebb szám, melynek 42-vel való osztási maradéka 8. (**1 pont**)
Így megőrizzük a 43-mal való osztási maradékot és $50 - 27 = 23$-mal „növeljük” a 42-vel való osztási maradékot:

$$\begin{aligned}2024 &= 1035 + 23 \cdot 43 = (24 \cdot 43 + 3) + 23 \cdot 43 = 47 \cdot 43 + 3,\\ 2024 &= 1035 + 23 \cdot 43 = (24 \cdot 42 + 27) + (23 \cdot 42 + 23) = 47 \cdot 42 + (27 + 23) = 47 \cdot 42 + 42 + 8\\ &= 48 \cdot 42 + 8.\end{aligned}$$

Tehát 2024 a legkisebb olyan négyjegyű szám, amelynek 42-vel való osztási maradéka 8 és 43-mal való osztási maradéka 3. (**2 pont**)

b) Kiindulva abból, hogy $10000 = 232 \cdot 43 + 24$, kapjuk, hogy $10000 - 21 = 9979 = 232 \cdot 43 + 3$, tehát 9979 a legnagyobb olyan négyjegyű szám, amelynek a 43-mal való osztási maradéka 3. (**1 pont**)
Továbbá $9979 = 237 \cdot 42 + 25$. Ha a 9979 számot 43-mal csökkentjük, akkor a 43-mal való osztási maradék nem változik, illetve a 42-vel való osztási maradék 1-gyel csökken. Így megőrizzük a 43-mal való osztási maradékot és $25 - 8 = 17$-tel csökkentjük a 42-vel való osztási maradékot

$$\begin{aligned}9248 &= 9979 - 17 \cdot 43 = (232 \cdot 43 + 3) - 17 \cdot 43 = 215 \cdot 43 + 3,\\ 9248 &= 9979 - 17 \cdot 43 = (237 \cdot 42 + 25) - 17 \cdot 42 - 17 = 220 \cdot 42 + 8.\end{aligned}$$

Tehát 9248 a legnagyobb olyan négyjegyű szám, amelynek 42-vel való osztási maradéka 8 és 43-mal való osztási maradéka 3. (**1 pont**)

■

3. feladat (10 pont)**.** András, Bence, Csaba és Dorottya szenvedélyes bélyeggyűjtők. A három fiúnak együtt 11-gyel több bélyege van, mint Dorottya bélyegei számának háromszorosa. Ha András vásárol még 44 darab, Bence még 46 darab és Csaba még 45 darab bélyeget, akkor hármuknak együtt ötször annyi bélyegük lesz, mint Dorottyának.

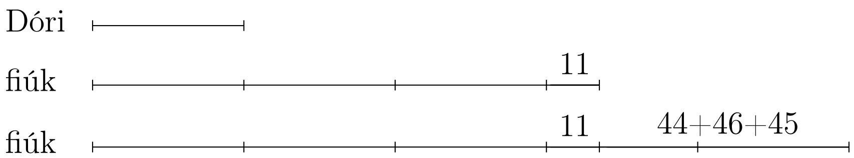
a) Hány darab bélyege van Dorottyának?

b) Határozd meg a fiúk bélyegeinek számát külön-külön, ha tudjuk, hogy Csabának 3 darab bélyeggel több van, mint Andrásnak, illetve Bencének pedig 1 darab bélyeggel kevesebb van, mint Csabának!

Pálhegyi Farkas László, Nagyvárad
Nagy Örs, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

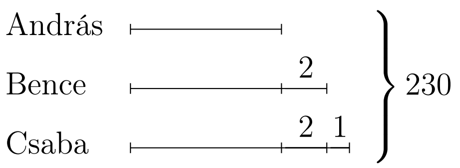
a) A három fiú bélyegeinek számát együtt, illetve Dorottya bélyegeinek számát az alábbi ábra mutatja.



(1 pont)

Mivel a három fiúnak együtt 11-gyel több bélyege van, mint Dorottya bélyegei számának háromszorosa, ugyanakkor 44, 46, illetve 45 darab bélyeget vásárolva, a három fiúnak együtt ötször annyi bélyege lesz, mint Dorottyának, ezért $11 + 44 + 46 + 45 = 146$ éppen a Dorottya bélyegei számának $5 - 3 = 2$-szerese. **(2 pont)**
Tehát Dorottyának $146 : 2 = 73$ darab bélyege van. **(1 pont)**

b) Mivel Csabának 3 darab bélyeggel van több, mint Andrásnak, Bencének pedig egy darabbal kevesebb, mint Csabának, ezért Bencének $3 - 1 = 2$ bélyeggel több van, mint Andrásnak. **(1 pont)**
Ugyanakkor együtt 11 bélyeggel több bélyegük van, mint Dorottya bélyegei számának háromszorosa, azaz $11 + 3 \cdot 73 = 230$ bélyegük van. A fiúk bélyegeinek számát külön-külön az alábbi ábra mutatja.



(1 pont)

Ekkor Andrásnak $[230 - (2 + 3)] : 3 = 225 : 3 = 75$ bélyege van, **(2 pont)**
Bencének $75 + 2 = 77$, Csabának pedig $75 + 3 = 78$ bélyege van. **(1 pont)**

■

4. feladat (10 pont)**.** Adottak az

$$A = \left(5^6\right)^9 : \left(4^2 + 3^2\right)^{26} - \left[(9 \cdot 2)^{15} : \left(3^{29} \cdot 2^{15}\right) + 0^{2024} - \left(3^4 - 2^4 \cdot 5\right)^{2024}\right]^4$$

és

$$B = 2^7 - 13 \cdot \left\{89 - 5 \cdot \left[22 - 6 \cdot \left(40^2 - 41 \cdot 39\right)\right]\right\} + \left(3^2 - 2^3\right)^{2024}$$

természetes számok.

a) Hasonlítsd össze a 3^A és a 2^B számokat!
b) Hány köbszám van a 2^B és a 3^A számok között?
c) Igazold, hogy az $A^{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2023\cdot 2024} + B^{1+2+3+\ldots+2023+2024}$ szám nem négyzetszám!

Mátyás Beáta, Szatmárnémeti
Nagy Örs, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Az $A = (5^6)^9 : (4^2+3^2)^{26} - \left[(9\cdot 2)^{15} : (3^{29}\cdot 2^{15}) + 0^{2024} - (3^4 - 2^4\cdot 5)^{2024}\right]^4$ szám első tagja

$$\left(5^6\right)^9 : \left(4^2+3^2\right)^{26} = 5^{54} : (16+9)^{26} = 5^{54} : 25^{26} = 5^{54} : 5^{52} = 5^2 = 25, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

így

$$\begin{aligned} A &= 25 - \left[(9\cdot 2)^{15}\left(3^{29}\cdot 2^{15}\right) + 0^{2024} - \left(3^4 - 2^4\cdot 5\right)^{2024}\right]^4 \\ &= 25 - \left[\left(3^{30}\cdot 2^{15}\right) : \left(3^{29}\cdot 2^{15}\right) - (81-80)^{2024}\right]^4 \\ &= 25 - [3-1]^4 = 25 - 16 \\ &= 9. \end{aligned} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$\begin{aligned} B &= 2^7 - 13\cdot\left\{89 - 5\cdot\left[22 - 6\cdot\left(40^2 - 41\cdot 39\right)\right]\right\} + \left(3^2 - 2^3\right)^{2024} \\ &= 128 - 13\cdot[89 - 5\cdot(22 - 6\cdot 1)] + 1^{2024} = 128 - 13\cdot 9 + 1 \\ &= 12. \end{aligned} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A $3^A = 3^9$ és a $2^B = 2^{12}$ számok összehasonlítása érdekében, azonos hatványkitevőkre hozzunk:

$$3^9 = 3^{3\cdot 3} = (3^3)^3 = 27^3, \quad \text{illetve} \quad 2^{12} = 2^{4\cdot 3} = 16^3. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel 27>16, ezért $27^3 > 16^3$, tehát $3^A > 2^B$. **(1 pont)**

b) Az előző alpont alapján $2^B < 3^A$, így a $2^B = 16^3$ és $3^A = 27^3$ között pontosan $26 - 17 + 1 = 10$ darab köbszám van. **(1 pont)**

c) Vizsgáljuk az $A^{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2024} + B^{1+2+\ldots+2024}$ összeg két tagját alkotó hatványok utolsó számjegyét! Mivel $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2024$ páros, és a 9-es páros kitevős hatványai 1-esre végződnek, ezért $A^{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2024}$ utolsó számjegye 1. **(1 pont)**
Mivel $1+2+\ldots+2024 = \dfrac{2024\cdot 2025}{2} = 1012\cdot 2025 \mathrel{\vdots} 4$, és a 12-es négy többszörös kitevőjű hatványai 6-osra végződnek, ezért $B^{1+2+\ldots+2024}$ utolsó számjegye 6. **(1 pont)**
Ekkor az $A^{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2024} + B^{1+2+\ldots+2024}$ összeg utolsó számjegye 7, így nem négyzetszám. **(1 pont)**

■