VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
megyei szakasz, 2024. február 3.

VI. osztály

1. feladat (10 pont). a) Határozd meg az $a+2b+3c+4d$ összeg lehető legkisebb értékét, amikor az a, b, c, d természetes számokra teljesül, hogy

$$2a = \frac{8b}{5} = \frac{4c}{3} = \frac{96}{d}.$$

b) Határozd meg azokat az $\overline{abcd}$ alakú négyjegyű természetes számokat, amelyek teljesítik az

$$\overline{abc} \cdot (a^2 + 2d) = 2024$$

összefüggést!

Hamar Erzsébet, Marosvásárhely
Máthé Attila-István, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Mivel

$$2a = \frac{96}{d} \implies a = \frac{48}{d},$$
$$\frac{8b}{5} = \frac{96}{d} \implies b = \frac{60}{d},$$
$$\frac{4c}{3} = \frac{96}{d} \implies c = \frac{72}{d}.$$
(1 pont)

Az a, b, c és d természetes számok, ezért $d \mid 48$, $d \mid 60$, $d \mid 72$, tehát d osztja a $48 = 4 \cdot 12$, $60 = 5 \cdot 12$, $72 = 6 \cdot 12$ számok legnagyobb közös osztóját. Tehát $d \mid 12$, ezért $d \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. **(1 pont)**

- Ha $d = 12$, akkor kapjuk, hogy $a = 4, b = 5$, $c = 6$, így $a + 2b + 3c + 4d = 80$.
- Ha $d = 6$, akkor $a = 8, b = 10$, $c = 12$ és $a + 2b + 3c + 4d = 88$.
- Ha $d = 4$, akkor $a = 12, b = 15$, $c = 18$ és $a + 2b + 3c + 4d = 112$.
- Ha $d = 3$, akkor $a = 16, b = 20$, $c = 24$ és $a + 2b + 3c + 4d = 140$.
- Ha $d = 2$, akkor $a = 24, b = 30$, $c = 36$ és $a + 2b + 3c + 4d = 200$.
- Ha $d = 1$, akkor $a = 48, b = 60$, $c = 72$ és $a + 2b + 3c + 4d = 388$.

Tehát a $d = 12$, $a = 4, b = 5$ és $c = 6$ értékekre lesz az $a + 2b + 3c + 4d$ összeg a legkisebb és ez a legkisebb érték 80. **(2 pont)**

b) Mivel $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$, így azt kapjuk, hogy $\overline{abc} \cdot (a^2 + 2d) = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$. A $100 \leq \overline{abc} < 1000$ egyenlőtlenségek alapján

$$2 < \frac{2024}{1000} < \frac{2024}{\overline{abc}} = a^2 + 2d \leq \frac{2024}{100} < 21.$$

Tehát $(a^2+2d) \mid 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ és $2 < a^2+2d < 21$, ahonnan kapjuk, hogy az a^2+2d lehetséges értékei 4, 8, 11, így az $\overline{abc}$ lehetséges értékei $\frac{2024}{4} = 506$, $\frac{2024}{8} = 253$ és $\frac{2024}{11} = 184$. (**2 pont**)

I. eset. Ha $\overline{abc} = 184$, akkor $a = 1$ és $a^2+2d = \frac{2024}{184} = 11$, ahonnan $d = 5$, tehát $\overline{abcd} = 1845$. (**1 pont**)

II. eset. Ha $\overline{abc} = 253$, akkor $a = 2$ és $a^2+2d = \frac{2024}{253} = 8$, ahonnan $d = 2$, tehát $\overline{abcd} = 2532$. (**1 pont**)

III. eset. Ha $\overline{abc} = 506$, akkor $a = 5$ és $a^2+2d = \frac{2024}{506} = 4$, ahonnan azt kapnánk, hogy $d = \frac{4-25}{2}$, amely nem természetes szám. (**1 pont**)

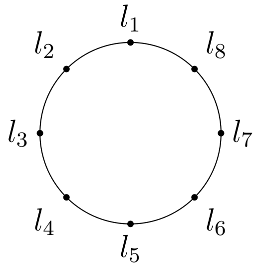
Így a keresett $\overline{abcd}$ négyjegyű számok az 1845 és 2532.

■

2. feladat (10 pont)**.** Nyolc lány körtáncot jár az iskolaudvaron nagyszünetben. A fiúk szemlélik őket és megállapítják: bármely három egymás melletti lány életkorának összege legtöbb 40 év, és bármely egymás mellett álló négy lány életéveinek összege legkevesebb 53 év. Ha tudjuk, hogy mindenik lány életkora természetes szám, határozd meg a lányok életkorának összegét.

Hodgyai Edit, Micske

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Jelölje $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_8$ a körtáncot járó nyolc lány életkorát olyan sorrendben, ahogy egymás mellett állnak.



Bármely három egymás melletti lány életkorának összege legtöbb 40 év, felírjuk a lehetséges eseteket:

$$
\begin{aligned}
l_1 + l_2 + l_3 &\leq 40,\\
l_2 + l_3 + l_4 &\leq 40,\\
l_3 + l_4 + l_5 &\leq 40,\\
l_4 + l_5 + l_6 &\leq 40,\\
l_5 + l_6 + l_7 &\leq 40,\\
l_6 + l_7 + l_8 &\leq 40,\\
l_7 + l_8 + l_1 &\leq 40,\\
l_8 + l_1 + l_2 &\leq 40.
\end{aligned}
$$
(**2 pont**)

A megfelelő oldalakat összeadva kapjuk, hogy

$$3 \cdot (l_1 + l_2 + l_3 + \cdots + l_8) \leq 8 \cdot 40 \iff l_1 + l_2 + l_3 + \cdots + l_8 \leq \frac{320}{3} = 106{,}(6).$$
(**2 pont**)

Mivel bármely egymás mellett álló négy lány életéveinek összege legkevesebb 53 év, felírjuk az összes lehetséges esetet:

$$
\begin{aligned}
53 &\leq l_1 + l_2 + l_3 + l_4,\\
53 &\leq l_2 + l_3 + l_4 + l_5,\\
53 &\leq l_3 + l_4 + l_5 + l_6,\\
53 &\leq l_4 + l_5 + l_6 + l_7,\\
53 &\leq l_5 + l_6 + l_7 + l_8,\\
53 &\leq l_6 + l_7 + l_8 + l_1,\\
53 &\leq l_7 + l_8 + l_1 + l_2,\\
53 &\leq l_8 + l_1 + l_2 + l_3.
\end{aligned}
$$

(**2 pont**)

A megfelelő oldalakat összadva kapjuk, hogy

$$
8 \cdot 53 \leq 4 \cdot (l_1 + l_2 + l_3 + \cdots + l_8) \iff 2 \cdot 53 \leq l_1 + l_2 + l_3 + \cdots + l_8 \iff
$$
$$
\iff 106 \leq l_1 + l_2 + l_3 + \cdots + l_8.
$$

(**2 pont**)

A fenti két egyenlőtlenség alapján $106 \leq l_1 + l_2 + l_3 + \cdots + l_8 \leq 106{,}(6)$. De tudjuk, hogy a lányok életkorainak összege természetes szám, ezért ez az összeg

$$
l_1 + l_2 + l_3 + \cdots + l_8 = 106.
$$

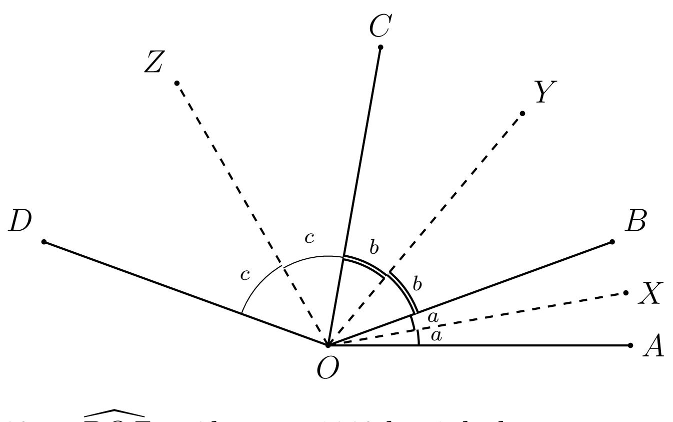
(**1 pont**)

■

3. feladat (10 pont)**.** Az $\widehat{AOD}$ belsejében felvesszük az OB és OC félegyeneseket, $\widehat{AOB} < \widehat{AOC}$. Az OX, OY és OZ félegyenesek rendre az $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, illetve $\widehat{COD}$ szögfelezői. Tudjuk, hogy $\widehat{AOD} = 160°$, $\widehat{XOC} = 70°$ és $\widehat{BOZ} = 100°$. Határozd meg az $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ és $\widehat{COD}$ szögek mértékét!

Simon József, Csíkszereda, Matlap 10/2023, A:4834

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Legyen $\widehat{AOX} = \widehat{XOB} = a$, $\widehat{BOY} = \widehat{YOC} = b$ és $\widehat{COZ} = \widehat{ZOD} = c$. Így $2a + 2b + 2c = 160°$, ahonnan $a + b + c = 80°$. (**1 pont**)



Mivel $\widehat{XOC} = a + 2b = 70°$ és $\widehat{BOZ} = 2b + c = 100°$ kapjuk, hogy $c = a + 30°$. (**1 pont**)
Továbbá $a + b + c = 80°$ és $c = a + 30°$, következik, hogy $2a + b = 50°$. (**1 pont**)

Mivel $a + b + c = 80°$ és $2b + c = 100°$, következik, hogy $b = a + 20°$. (**1 pont**)
A kapott összefüggéseket behelyettesítve az $a + b + c = 80°$ egyenletbe, kapjuk hogy

$$a + a + 20° + a + 30° = 80°, \qquad (\mathbf{1\ pont})$$

azaz

$$3a + 50° = 80° \iff 3a + 50° = 80° \iff 3a = 30° \iff a = 10° \qquad (\mathbf{2\ pont})$$

így $b = a + 20° = 30°$ és $c = a + 30° = 40°$. (**1 pont**)
Tehát az $\widehat{AOB} = 20°$, $\widehat{BOC} = 60°$ és $\widehat{COD} = 80°$. (**1 pont**)

■

4. feladat (10 pont)**.** a) Hasonlítsd össze az

$$a = \frac{2020}{2021} + \frac{2023}{2024} \quad \text{és} \quad b = \frac{2021}{2022} + \frac{2022}{2023}$$

számokat!
b) Melyik nagyobb az

$$x = \frac{n}{n+1} + \frac{n+3}{n+4} \quad \text{és} \quad y = \frac{n+1}{n+2} + \frac{n+2}{n+3}$$

számok közül, ha n egy tetszőleges természetes szám?

Zákány Mónika, Nagybánya

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a) Az a számot felírhatjuk, hogy

$$a = 1 - \frac{1}{2021} + 1 - \frac{1}{2024} = 2 - \frac{1}{2021} - \frac{1}{2024}. \qquad (\mathbf{1\ pont})$$

Hasonlóan

$$b = 1 - \frac{1}{2022} + 1 - \frac{1}{2023} = 2 - \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023}. \qquad (\mathbf{1\ pont})$$

A következő átalakítást elvégezve kapjuk, hogy

$$b = \left(2 - \frac{1}{2021} - \frac{1}{2024}\right) + \frac{1}{2021} + \frac{1}{2024} - \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023} =$$

$$= a + \left(\frac{1}{2021} - \frac{1}{2022}\right) - \left(\frac{1}{2023} - \frac{1}{2024}\right) = a + \frac{1}{2021 \cdot 2022} - \frac{1}{2023 \cdot 2024} > a. \qquad (\mathbf{2\ pont})$$

Tehát megállapíthatjuk, hogy $b > a$.
b) Mivel

$$x = \frac{n}{n+1} + \frac{n+3}{n+4} = 2 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+4}, \qquad (\mathbf{2\ pont})$$

az előbbihez hasonló átalakításokat végezve kapjuk, hogy

$$y = 2 - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} = \left(2 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+4}\right) + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} =$$

$$= x + \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+3)(n+4)} > x.$$ (**2 pont**)

Ebben az esetben belátható, hogy $y > x$, bármely n természetes szám esetén. (**1 pont**)

■