VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
megyei szakasz, 2024. február 3.

XI. osztály

1. feladat. Az $(a_n)_{n\geq 1}$, illetve $(b_n)_{n\geq 0}$ sorozatot az

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{k}{4}\right],\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ és a } b_n = a_{4n+1}^2 + a_{4n+2}^2 + a_{4n+3}^2 + a_{4n+4}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

összefüggésekkel értelmezzük, ahol $[x]$ az x valós szám egész részét jelöli.

a) Igazold, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4}{b_n} = \frac{1}{16}$.

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} n^4 \left(2^{\frac{1}{b_n}} + \ln\left(1+\frac{1}{b_n}\right) - 1\right)$ határértéket!

2. feladat. Az $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ mátrix esetén $\det(A^2 - 2I_2) = 0$. Bizonyítsd be, hogy $A^2 = 2I_2$ és $\det A = -2$.

3. feladat. Az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat általános tagja $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot k!$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Igazold, hogy a sorozat tagjai közt egyetlen négyzetszám van!

b) Határozd meg az a_{2024} utolsó 505 számjegyének összegét!

4. feladat. Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozatot a következőképpen értelmezzük:

$$a_1 = 1 \text{ és } a_{n+1}(n + a_n) = na_n,\ \forall n \geq 1.$$

a) Igazold, hogy a sorozat konvergens!

b) Számítsd ki az $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozat határértékét!

c) Igazold, hogy $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_{k+1}^2} < \frac{n(5n+3)}{2}$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 3 óra.