VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
megyei szakasz, 2024. február 3.

VII. osztály

1. feladat (10 pont). a) Igazold, hogy az alábbi a szám négyzetszám:

$$a=\sqrt{\frac{8}{7}+\frac{9}{14}+\frac{10}{21}+\cdots+\frac{119}{784}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{112}\right)}.$$

b) Igazold, hogy az alábbi b és c számok racionálisak:

$$b=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{12}}+\cdots+\frac{\sqrt{2024}-\sqrt{2025}}{\sqrt{4098600}},$$

$$c=\frac{360}{\sqrt{18}}+\frac{5}{\left(5-3\sqrt{2}\right)^{2023}}\cdot\frac{\left(10-6\sqrt{2}\right)^{2024}}{2^{2022}}.$$

Matlap 1/2024, A:4858

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a)

$$a=\sqrt{\left(\frac{1+7}{1\cdot 7}-\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{2+7}{2\cdot 7}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3+7}{3\cdot 7}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{112+7}{112\cdot 7}-\frac{1}{112}\right)} \quad \textbf{(1 pont)}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{1}-\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{112}-\frac{1}{112}\right)} \quad \textbf{(1 pont)}$$

$$=\sqrt{\underbrace{\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{7}}_{112-\text{szer}}}=\sqrt{\frac{112}{7}}=\sqrt{16}=4=2^2,$$

tehát a négyzetszám. **(1 pont)**

b)

$$b=\frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}}+\cdots+\frac{\sqrt{2024}-\sqrt{2025}}{\sqrt{2024}\cdot\sqrt{2025}} \quad \textbf{(1 pont)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2024}}-\frac{1}{\sqrt{2023}}+\frac{1}{\sqrt{2025}}-\frac{1}{\sqrt{2024}} \quad \textbf{(1 pont)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2025}}-\frac{1}{\sqrt{1}}=\frac{1}{45}-1=-\frac{44}{45}\in\mathbb{Q}. \quad \textbf{(1 pont)}$$

$$c = \frac{360}{3\sqrt{2}} + \frac{5}{\left(5-3\sqrt{2}\right)^{2023}} \cdot \frac{2^{2024} \cdot \left(5-3\sqrt{2}\right)^{2024}}{2^{2022}} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$= \frac{360\sqrt{2}}{6} + 5 \cdot 2^2 \cdot \left(5-3\sqrt{2}\right) \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$= 60\sqrt{2} + 100 - 60\sqrt{2} = 100 \in \mathbb{Q}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

■

2. feladat (10 pont)**.** Hány olyan különböző háromszög szerkeszthető, melyek oldalai mind különböző hosszúak, és az oldalak hosszai milliméterben kifejezve a 2024 szám valamelyik kétjegyű osztójával egyenlőek?

Császár Sándor, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Prímtényezőkre bontva $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$, innen következik, hogy a 2024 kétjegyű osztói a következők: $11, 22, 23, 44, 46, 88$ és 92. **(3 pont)**

Felírva az összes olyan számhármast, amelyek a 2024 különböző kétjegyű osztóival alkothatók, és amelyekben a számok növekvő sorrendben szerepelnek, a következő 35 darab számhármast kapjuk:

$$\begin{gathered}(11,22,23),\ (11,22,44),\ (11,22,46),\ (11,22,88),\ (11,22,92),\ (11,23,44),\ (11,23,46),\\ (11,23,88),\ (11,23,92),\ (11,44,46),\ (11,44,88),\ (11,44,92),\ (11,46,88),\ (11,46,92),\\ (11,88,92),\ (22,23,44),\ (22,23,46),\ (22,23,88),\ (22,23,92),\ (22,44,46),\ (22,44,88),\\ (22,44,92),\ (22,46,88),\ (22,46,92),\ (22,88,92),\ (23,44,46),\ (23,44,88),\ (23,44,92),\\ (23,46,88),\ (23,46,92),\ (23,88,92),\ (44,46,88),\ (44,46,92),\ (44,88,92),\ (46,88,92).\end{gathered}$$

A fenti számhármasok közül azok lesznek egy háromszög oldalainak mérőszámai, melyekre teljesül, hogy a két kisebbik szám összege nagyobb a harmadiknál, ezek a következők:

$$\begin{gathered}(11,22,23),\ (11,44,46),\ (11,88,92),\ (22,23,44),\ (22,44,46),\ (22,88,92),\\ (23,44,46),\ (23,88,92), (44,46,88),\ (44,88,92),\ (46,88,92).\end{gathered} \qquad \textbf{(5 pont)}$$

Tehát 11 különböző háromszög szerkeszthető, amely megfelel a feladat feltételeinek. **(1 pont)**

■

3. feladat (10 pont)**.** Adott az $ABCD$ trapéz, ahol $AB \parallel CD$ és $AB > CD$. Az M pont a CD szakasz felezőpontja, illetve N az AB szakasz felezőpontja, valamint a nagyalapon fekvő szögek pótszögek.

a) Ha EF a trapéz középvonala, ahol $E \in AD$, $F \in BC$, valamint $\{Q\} = DB \cap EF$, mutasd ki, hogy $MQ \parallel BC$!

b) Igazold, hogy $MN < \dfrac{AD+BC}{2}$!

c) Bizonyítsd be, hogy $MN = \dfrac{AB-DC}{2}$!

(***)

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

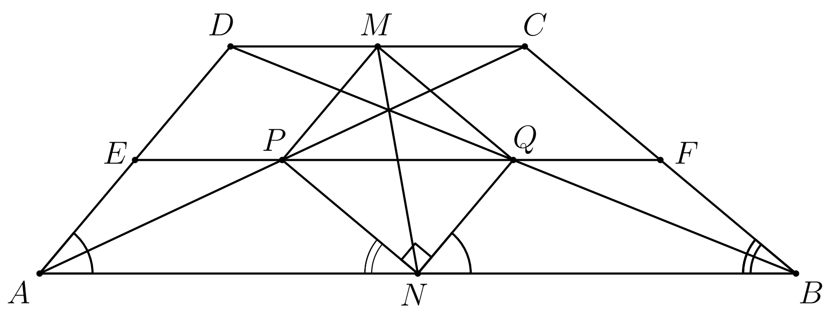
a) Az EF az $ABCD$ trapéz középvonala és $EF \cap BD = \{Q\}$, innen következik, hogy QF középvonal a BCD háromszögben, tehát Q a BD szakasz felezőpontja. (**1 pont**)
Mivel M a CD felezőpontja és Q a BD szakasz felezőpontja következik, hogy MQ középvonal a DBC háromszögben, innen következik, hogy $QM \parallel BC$, amit bizonyítani kellett. (**2 pont**)

b) Tudjuk, hogy MQ középvonal a DBC háromszögben, ezért $MQ = \dfrac{BC}{2}$. (**1 pont**)
Mivel Q a BD szakasz felezőpontja és N az AB szakasz felezőpontja, innen következik, hogy QN középvonal a BAD háromszögben, tehát $QN = \dfrac{AD}{2}$. (**1 pont**)
Az MQN háromszögben a háromszög egyenlőtlenség alapján következik, hogy $MN < QM + QN$, tehát $MN < \dfrac{AD+BC}{2}$. (**1 pont**)

c) Legyen $\{P\} = EF \cap AC$, ekkor PN középvonal az ABC háromszögben és MQ szintén középvonal a DBC háromszögben, innen következik, hogy $PN \parallel MQ \parallel BC$ és $PN = MQ = \dfrac{BC}{2}$, tehát $PNQM$ paralelogramma. (**1 pont**)
Mivel $PN \parallel BC$ következik, hogy $\widehat{PNA} = \widehat{B}$. Hasonlóan mivel $QN \parallel AD$ következik, hogy $\widehat{QNB} = \widehat{A}$. Mivel $\widehat{BAD} + \widehat{CBA} = \widehat{PNA} + \widehat{QNB} = 90°$ következik, hogy $\widehat{PNQ} = 90°$, ehhez hozzávetve, hogy $PNQM$ paralelogramma következik, hogy a $PNQM$ négyszög egy téglalap.
(**1 pont**)
Mivel $PNQM$ téglalap következik, hogy $MN = PQ$. A trapézban a középvonal $EF = \dfrac{AB+DC}{2}$ és EP meg QF középvonalak az ADC illetve a BDC háromszögekbe, így

$$MN = PQ = EF - EP - QF = \frac{AB+DC}{2} - \frac{DC}{2} - \frac{DC}{2} = \frac{AB-DC}{2}.$$

(**1 pont**)



■

4. feladat (10 pont)**.** Határozd meg azt az $\overline{abcd}$ alakú négyjegyű természetes számot, amelyre fennáll az $\overline{abcd} = \left(2\overline{ab}+4\right)\left(2\overline{cd}-2\right)$ egyenlőség!

Simon József, Csíkszereda

Első megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Átalakítva a feladatban szereplő egyenlőséget kapjuk, hogy $100\overline{ab} + \overline{cd} = 4\overline{ab} \cdot \overline{cd} - 4\overline{ab} + 8\overline{cd} - 8$, melyet rendezve a $104\overline{ab} - 4\overline{ab} \cdot \overline{cd} - 7\overline{cd} + 8 = 0$ egyenlőséghez jutunk, (**2 pont**)
amely ekvivalens a $\left(26 - \overline{cd}\right) \cdot \left(4\overline{ab} + 7\right) = 174$ egyenlőséggel. (**2 pont**)

A $4\overline{ab}+7$ a 174 osztója és a 174 osztóinak halmaza $D_{174}=\{1,2,3,6,29,58,87,174\}$. A $4\overline{ab}+7$-nek a 4-gyel való osztási maradéka 3, ezért a $4\overline{ab}+7$ csakis 87-tel lehet egyenlő, ahonnan kapjuk, hogy $\overline{ab}=20$. (**3 pont**)
A fentiek alapján $26-\overline{cd}=2$, ahonnan kapjuk, hogy $\overline{cd}=24$, (**1 pont**)
tehát a keresett szám $\overline{abcd}=2024$. (**1 pont**)

■

Második megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Átalakítva a feladatban szereplő egyenlőséget kapjuk, hogy $100\overline{ab}+\overline{cd}=4\overline{ab}\cdot\overline{cd}-4\overline{ab}+8\overline{cd}-8$. (**1 pont**)
Bevezetve az $\overline{ab}=x$ és $\overline{cd}=y$ jelöléseket kapjuk, hogy $100x+y=4xy-4x+8y-8$. (**1 pont**)
Az előbbi összefüggésből kifejezve az y-t kapjuk, hogy $y=\dfrac{104x+8}{4x+7}$. (**2 pont**)
Mivel y értéke természetes szám kell legyen, ezért $(4x+7)\mid(104x+8)$, figyelembe véve, hogy $(4x+7)\mid 26\cdot(4x+7)$, következik, hogy $(4x+7)\mid\left[26\cdot(4x+7)-(104x+8)\right]=174$, ahonnan kapjuk, hogy $(4x+7)$ osztója kell legyen a 174-nek. (**2 pont**)
Mivel a 174 osztóinak halmaza $D_{174}=\{1,2,3,6,29,58,87,174\}$, ezért a $4x+7$ csak a 87-tel lehet egyenlő ahhoz, hogy x természetes szám legyen. Innen kapjuk, hogy $x=20$. (**1 pont**)
A fentiekből következik, hogy $y=\dfrac{104\cdot 20+8}{87}=\dfrac{2088}{87}=24$. (**1 pont**)
Mivel $\overline{ab}=x=20$ és $\overline{cd}=y=24$, következik, hogy a keresett négyjegyű szám $\overline{abcd}=2024$. (**1 pont**)

Megjegyzés. A feladat megoldható hasonló módon, ha az x-et fejezzük ki.

■