VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
megyei szakasz, 2024. február 3.

VIII. osztály

1. feladat (10 pont)**.** Adottak az $x = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{2023}+\sqrt{2024}}$ és $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}}$ valós számok.

a) Igazold, hogy $x+y$ természetes szám!

b) Igazold, hogy $|x-22| - |y-22| < 45 - \sqrt{2024}$.

Faluvégi Melánia, Zilah
Nagy Enikő, Nagyvárad
Tóth Csongor, Szováta

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Kiszámítjuk az x és y számok összegét, így

$$x+y = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}}.$$

A nevező gyöktelenítése után azt kapjuk, hogy

$$x+y = \frac{1-\sqrt{2}}{-1} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} + \ldots + \frac{\sqrt{2024}-\sqrt{2025}}{-1}.$$ **(2 pont)**

Továbbá $x+y = \frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{2024}-\sqrt{2025}}{-1} = \frac{1-\sqrt{2025}}{-1} = 44$, ami egy természetes szám. **(2 pont)**

b) Mivel $x > y$ és $x+y = 44$, ezért $x > 22$ és $y < 22$. **(2 pont)**
Ez alapján írhatjuk, hogy $|x-22| - |y-22| = x - 22 - (22-y) = x+y-44 = 0$. A $0 < 45 - \sqrt{2024}$ egyenlőtlenség egyenértékű azzal, hogy $45^2 > 2024$, ami igaz, hiszen $2025 > 2024$. **(3 pont)**

■

2. feladat (10 pont)**.** Az $ABCD$ trapézban $\widehat{A} = \widehat{D} = 90°$. A trapéz átlói merőlegesek egymásra és az O pontban metszik egymást úgy, hogy $OA = 16$ cm és $OC = 9$ cm. Az AC átlóra a C pontban húzott merőleges az AB egyenest az E pontban metszi.

a) Számítsd ki a CE szakasz hosszát!

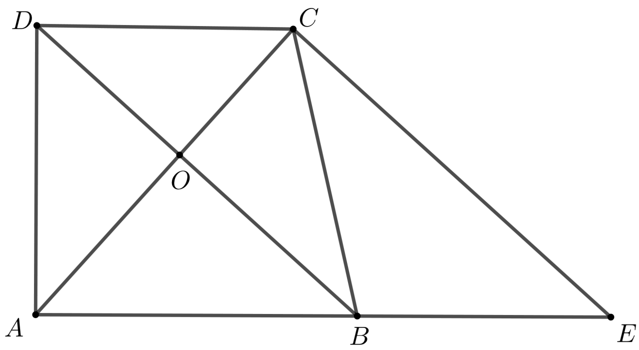
b) Mennyivel nagyobb az $AECD$ trapéz területe az $ABCD$ trapéz területénél?

c) Igazold, hogy $AD = \sqrt{DC \cdot AB}$.

Császár Sándor, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Az ADC derékszögű háromszögben a DC befogóra a befogótételt alkalmazva kapjuk, hogy $DC^2 = OC \cdot AC$, így $DC = \sqrt{OC \cdot AC} = \sqrt{9 \cdot 25} = 15$ cm. Az AD befogóra alkalmazva a befogótételt azt kapjuk, hogy $AD^2 = AO \cdot AC$, ahonnan $AD = \sqrt{AO \cdot AC} = \sqrt{16 \cdot 25} = 20$ cm. **(2 pont)**



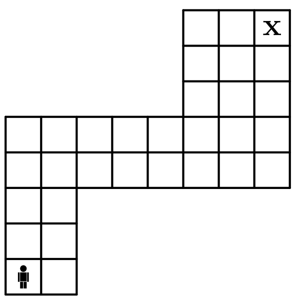
A DO szakasz magasság az ADC háromszögben, így a magasság tétele alapján $DO = \sqrt{AO \cdot OC} = \sqrt{16 \cdot 9} = 12$ cm. **(1 pont)**
Továbbá a DAB derékszögű háromszögben a DA befogóra a befogó tételét alkalmazzuk, tehát $DA^2 = DO \cdot DB$, ahonnan $DB = \frac{DA^2}{DO} = \frac{100}{3}$ cm. **(1 pont)**
A $DBEC$ négyszögben $DC \parallel BE$, valamint $DB \parallel CE$, mert mindkét szakasz merőleges a CA egyenesre. Ezek alapján $DBEC$ négyszög paralelogramma, tehát $CE = DB = \frac{100}{3}$ cm. **(1 pont)**

b) A $DBEC$ négyszög paralelogramma, ezért $BE = DC = 15$ cm.
Az $AECD$ trapéz területe az $ABCD$ trapéz területénél a CBE háromszög területével nagyobb, tehát $T_{CBE} = \frac{BE \cdot AD}{2} = \frac{15 \cdot 20}{2} = 150$ cm^2. **(2 pont)**

c) Az ADC és BAD derékszögű háromszögekben $\widehat{DCA} = \widehat{ADO} = 90° - \widehat{DAO}$, így a két háromszög hasonló, ezért $\frac{AD}{BA} = \frac{DC}{AD}$, ahonnan következik, hogy $AD = \sqrt{DC \cdot AB}$. **(2 pont)**

■

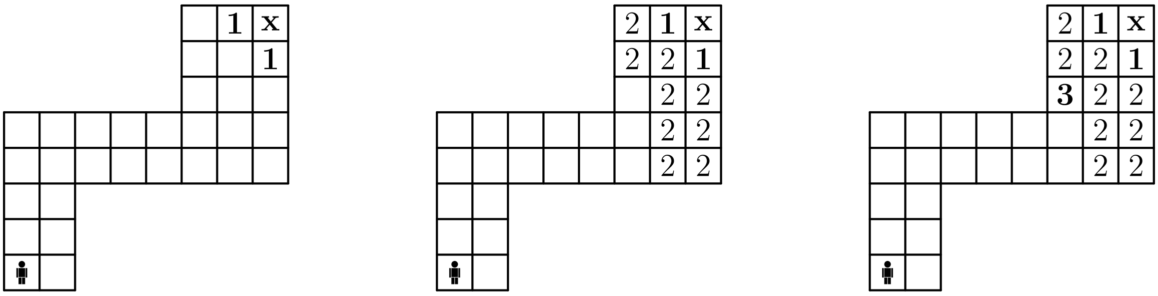
3. feladat (10 pont)**.** Az ábrán látható négyzetrácsos táblán két játékos játszik. A bal alsó négyzetben álló bábuval felváltva lépnek akárhány négyzetet vagy jobbra vagy felfelé. Az veszít, aki a bábuval az **X**-szel jelölt jobb felső négyzetre lép. Jelöld be a táblán azokat a négyzeteket, ahova lépve a kezdő játékos biztosan nyer! Indokold a válaszod!



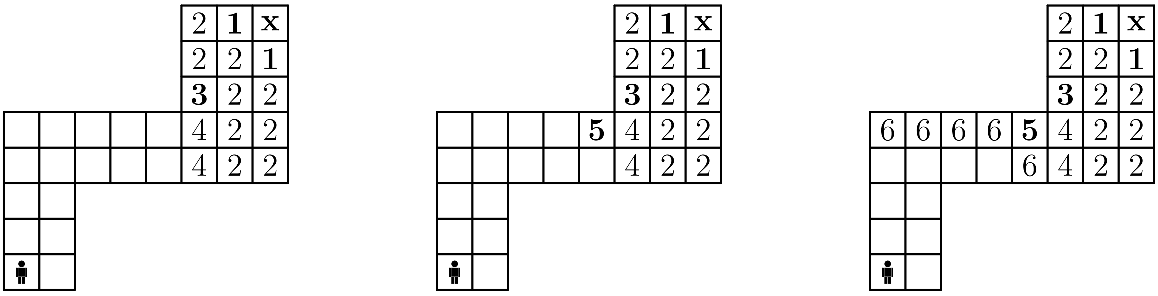
Matlap 1/2024, A:4865

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

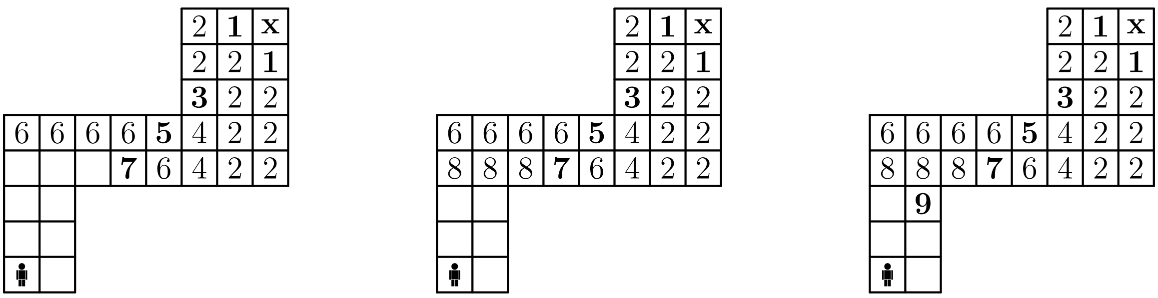
Az első játékos lépése kényszerítő kell legyen a másik játékos lépéséhez. **(1 pont)**



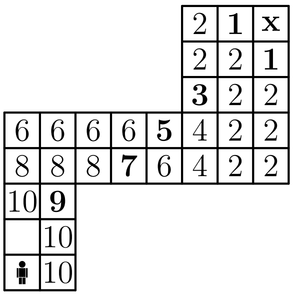
Visszafele gondolkodunk. Aki az **X** melletti két 1-essel jelölt négyzet egyikére lép, mindenképpen nyer, mivel ellenfele onnan csak a vesztes **X**-szel jelölt négyzetre léphet. **(1 pont)**
Aki valamelyik 2-essel jelölt négyzetre lép, az veszít, mivel ellenfele bármelyik 2-es négyzetről egyből valamelyik 1-essel jelölt négyzetre léphet és az előbb tárgyalt módon nyer. **(1 pont)**
Nyer az a játékos, aki a 3-assal jelölt négyzetre lép, hiszen ellenfele onnan csak a 2-essel jelölt négyzetekre léphet, így az előbbiek alapján veszít a korábbiak alapján. **(2 pont)**

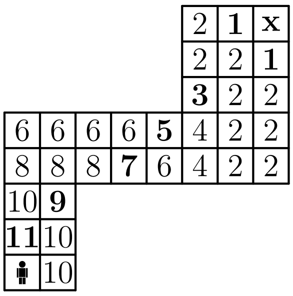


A 3-as négyzetre léphetünk a 4-essel jelölt négyzetekről, így aki a 4-esekre lép, az mindenképpen veszít a fentiek alapján.
Aki az 5-ös négyzetre lép mindenképpen nyer, mivel ellenfele onnan csak a 4-esekkel vagy 2-esekkel jelölt valamelyik négyzetre léphet és veszít az előbb tárgyaltak alapján. **(1 pont)**
Aki a 6-ossal jelölt négyzetre lép, az veszít, mert ellenfele onnan léphet az 5-ös négyzetre és nyer. Aki az 7-es négyzetre lép mindenképpen nyer, mivel ellenfele onnan csak a 6-os, 4-es vagy 2-es négyzetek valamelyikére léphet, ezért veszít. **(1 pont)**



Az a játékos, aki a 8-as négyzetek valamelyikére lép, az veszít, mert ellenfele onnan léphet a 7-es négyzetre és nyerhet az előbbiek alapján. A 9-es négyzetről csak 6-ossal vagy 8-assal jelölt négyzetre lehet lépni, így a fentiek alapján a 9-esre lépő játékos nyerhet. A 10-es négyzetekről egy lépéssel elérhető a 9-es négyzet. Így aki a 10-es négyzetekre lép veszít, hiszen ellenfele a 9-es négyzetre lépve nyerhet a korábbiak alapján. Végül a 11-es négyzetre lépő játékos nyerhet, mivel az ellenfele onnan csak a 10-es, 8-as vagy 6-os négyzetekre léphet, ahonnan veszít. (**1 pont**)

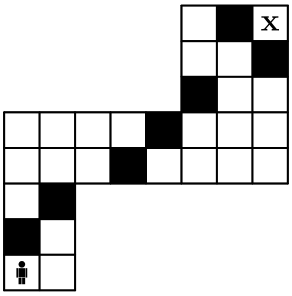




Összegezve, ha a kezdő játékos csak a páratlan számokkal jelzett négyzetekre lép, akkor ellenfele lépéseitől függetlenül nyer. Valóban, a páratlan számokkal jelzett négyzetek nyerő pozíciók, mivel onnan az ellenfél csak (annál kisebb) páros számokkal jelölt négyzetekre tud lépni, illetve páros számokkal jelölt négyzetekről a kezdő játékos mindig tud (annál kisebb) páratlan számmal jelölt négyzetre lépni. (**1 pont**)

■

Második megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Tekintsük a tábla alábbi színezését. A bábu és az **X** négyzetét fehéren hagyjuk. (**4 pont**)



Az vehető észre minden fehér négyzetről (az **X**-et kivéve) léphetünk valamelyik fekete négyzetre a megadott módon, (**1 pont**)
illetve fekete négyzetekről csak fehér négyzetekre léphetünk (feketére nem). (**1 pont**)
Így kezdő játékos a játék során mindig fekete négyzetre tud lépni, míg ellenfele csak fehér négyzetekre léphet. (**2 pont**)
A játék véges sok lépés után véget ér és a második játékos végül az **x**-szel jelölt fehér négyzetre kell lépjen. (**1 pont**)

■

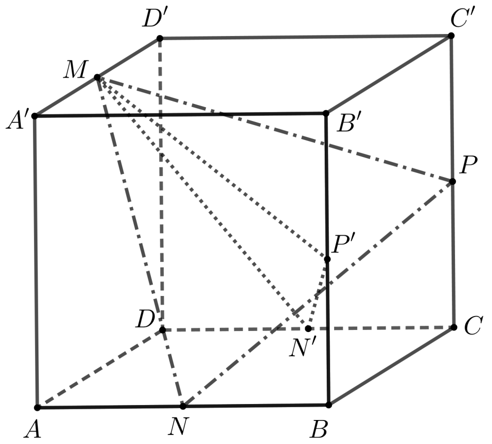
4. feladat (10 pont)**.** Az $ABCDA'B'C'D'$ kocka éle 12 cm.

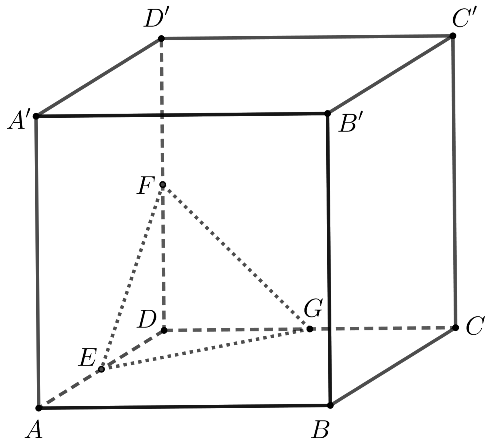
a) Hány különböző egyenlő oldalú háromszöget határoznak meg a kocka éleinek felezőpontjai? Indokold válaszodat!

b) Az A_1, E, F és G pontok az AB, DA, DD' és DC élek felezőpontjai. Az A_1 felezőponton áthaladó, az (EFG) síkkal párhuzamos sík az éleket az $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ pontokban metszi, ahol n a kocka azon éleinek a száma, amelyeket a párhuzamos sík metsz. Számítsd ki az A_1, $A_2, \ldots, A_n$ pontok által meghatározott konvex alakzat területét!

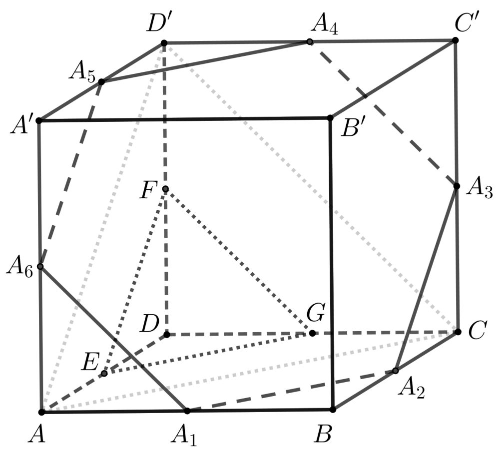
Császár Sándor, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**





a) Az $A'D'$ él M felezőpontját a többi él felezőpontjaival összekötő szakaszok hosszúság szerint 4 csoportba sorolhatók. Az $A'D'$ él M felezőpontját az AB, BB', DC, CC' élek felezőpontjaival összekötő szakaszok egyenlő hosszúak. Az $A'D'$ él M felezőpontját az AA', $A'B'$, DD', $D'C'$ élek felezőpontjaival összekötő szakaszok is egyenlő hosszúak. Végül az $A'D'$ él M felezőpontját az $B'C'$ és AD élek felezőpontjaival összekötő szakaszok egyenlő hosszúak, illetve a BC él felezőpontjával összekötő szakasz hossza különbözik az előzőktől. Az utóbbi két hosszúságú szakaszok esetén nem áll elő egyenlő oldalú háromszög.
Egyrészt az $A'D'$ oldal felezőpontját rögzítve két nagyobb egyenlő oldalú háromszög szerkeszthető: MNP és $MN'P'$. A legfelső lap felezőpontjaira alkalmazva a szerkesztést összesen 8 ilyen háromszöget kapunk. **(2 pont)**
Másrészt kisebb egyenlő oldalú háromszögből szintén 8 szerkeszthető. Minden 3 csúcsközeli felezőpont meghatároz egyet. **(1 pont)**
Tehát összesen 16 szabályos háromszög szerkeszthető. **(1 pont)**



b) Legyenek A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 a $BC, CC', C'D', D'A', A'A$ élek felezőpontjai. A háromszög középvonala párhuzamos a szembeni oldallal, így a (EFG) sík EF, FG és GE egyenesei párhuzamosak az $AD', D'C$ és CA egyenesekkel, amelyek szintén párhuzamosak rendre az A_5A_6, A_3A_4 és A_1A_2 egyenesekkel. **(2 pont)**
Továbbá $A_1A_2 \parallel AC \parallel A'C' \parallel A_5A_4$, hasonló módon $A_5A_6 \parallel D'A \parallel C'B \parallel A_3A_2$ és $A_3A_4 \parallel CD' \parallel$

$BA' \parallel A_1A_6$. Mivel bármelyik felezőpontból kiinduló egyenes ugyanazzal az (ACD') síkkal párhuzamos, ezért az $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_6$ pontok ugyanabban a síkban vannak, a kocka középpontjától egyenlő távolságra, és egy olyan szabályos hatszöget képeznek, amelynek oldalhosszúsága a kocka lapátlójának hosszának a fele, azaz $6\sqrt{2}$ cm. (**2 pont**)

Az $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ szabályos hatszög területe $T = \frac{6a^2\sqrt{3}}{4}$, ahol $a = 6\sqrt{2}$ a hatszög oldalának hossza, így $T = 108\sqrt{3}$ cm^2. (**1 pont**)

■