VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
megyei szakasz, 2024. február 3.

X. osztály

1. feladat. (a) Bizonyítsd a következő egyenlőtlenséget

$$\frac{\lg 2 + \lg 20 + \lg 200}{3} \le \lg \frac{2+200}{2} \ !$$

(b) Ha $(b_n)_{n\ge 1}$ olyan mértani haladvány, amelyre $b_n \ge 1$ minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, akkor bizonyítsd, hogy

$$\frac{\lg b_1 + \lg b_2 + \cdots + \lg b_n}{n} \le \lg \frac{b_1 + b_n}{2}\,,$$

minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

Milyen esetben áll fenn az egyenlőség?

2. feladat. Az $(S_n)_{n\ge 1}$ valós számsorozat általános tagja

$$S_n = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8+2\sqrt{15}}} + \cdots + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4n+2\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}},\ \forall n \ge 1.$$

(a) Igazold, hogy $S_n \le \sqrt{2n+1}$, minden $n \ge 1$ esetén!

(b) Határozd meg azokat az $n \in \mathbb{N}^*$ értékeket, amelyekre $\sqrt{2} \cdot S_n$ racionális szám lesz!

3. feladat. Adott az $a > 0$ valós szám. Igazold, hogy ha $z \in \mathbb{C}$ és $\mathrm{Re}(z) > a$, akkor

$$\left| \frac{1}{z} - \frac{2}{a} \right| < \frac{2}{a} \ !$$

4. feladat. Ali a szülőfalujától távol dolgozik. Munkahelye és szüleinek lakhelye között egy 100 km széles sivatag terül el. Ali meg akarja látogatni a szüleit. Kérdezősködik, számolgat, míg kiderül, hogy a sivatagban naponta 20 km-t tud megtenni, és egyszerre csak háromnapi élelmet és víztartalékot tud magával vinni. Az úton 20 kilométerenként ládák vannak, amelyekbe Ali élelem és víztartalékot tud elhelyezni. Legkevesebb hány nap alatt tud Ali átjutni a sivatagon?

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 3 óra.