MINISTERUL EDUCAȚIEI

VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
megyei szakasz, 2024. február 3.

VIII. osztály

1. feladat. Adottak az $x = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{2023}+\sqrt{2024}}$ és $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}}$ valós számok.

a) Igazold, hogy $x + y$ természetes szám!

b) Igazold, hogy $|x - 22| - |y - 22| < 45 - \sqrt{2024}$.

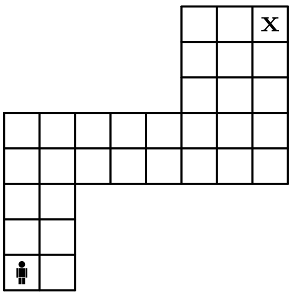
2. feladat. Az $ABCD$ trapézban $\widehat{A} = \widehat{D} = 90°$. A trapéz átlói merőlegesek egymásra és az O pontban metszik egymást úgy, hogy $OA = 16$ cm és $OC = 9$ cm. Az AC átlóra a C pontban húzott merőleges az AB egyenest az E pontban metszi.

a) Számítsd ki a CE szakasz hosszát!

b) Mennyivel nagyobb az $AECD$ trapéz területe az $ABCD$ trapéz területénél?

c) Igazold, hogy $AD = \sqrt{DC \cdot AB}$.

3. feladat. Az ábrán látható négyzetrácsos táblán két játékos játszik. A bal alsó négyzetben álló bábuval felváltva lépnek akárhány négyzetet vagy jobbra vagy felfelé. Az veszít, aki a bábuval az **X**-szel jelölt jobb felső négyzetre lép. Jelöld be a táblán azokat a négyzeteket, ahova lépve a kezdő játékos biztosan nyer! Indokold a válaszod!



4. feladat. Az $ABCDA'B'C'D'$ kocka éle 12 cm.

a) Hány különböző egyenlő oldalú háromszöget határoznak meg a kocka éleinek felezőpontjai? Indokold válaszodat!

b) Az A_1, E, F és G pontok az AB, DA, DD' és DC élek felezőpontjai. Az A_1 felezőponton áthaladó, az (EFG) síkkal párhuzamos sík az éleket az $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ pontokban metszi, ahol n a kocka azon éleinek a száma, amelyeket a párhuzamos sík metsz. Számítsd ki az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontok által meghatározott konvex alakzat területét!

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 3 óra.