

**Examenul național de bacalaureat 2025**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{st-nat}}$**

**Varianta 3**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**I. FELADATSOR**

**(30 pont)**

- 5p** 1. Igazolja, hogy  $2 \cdot (1, 1 + 0, 3) - 1, 8 = 1$ .
- 5p** 2. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + 4$  függvény. Határozza meg az  $a$  valós számot úgy, hogy teljesüljön az  $f(a) = a \cdot f(0)$  egyenlőség!
- 5p** 3. Oldja meg a valós számok halmazában a  $\sqrt{2-x} = \sqrt{x^2+x-1}$  egyenletet!
- 5p** 4. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy véletlenszerűen kiválasztva egy egyjegyű  $n$  természetes számot, az teljesítse az  $n^3 > 10$  egyenlőtlenséget!
- 5p** 5. Az  $xOy$  derékszögű koordináta-rendszerben adottak az  $A(1, 4)$ ,  $B(2, 0)$  és  $C(8, 2)$  pontok. Határozza meg az  $A$  pont és a  $BC$  szakasz felezőpontja közötti távolságot!
- 5p** 6. Az  $A$ -ban derékszögű  $ABC$  háromszögben  $BC = 10$  és  $\sin B = \frac{2}{5}$ . Igazolja, hogy  $AC = 4$ .

**II. FELADATSOR**

**(30 pont)**

1. Adottak az  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  és  $A(x) = \begin{pmatrix} 2+2x & x \\ -x & 2-2x \end{pmatrix}$  mátrixok, ahol  $x$  valós szám.
- 5p** a) Igazolja, hogy  $\det(A(1)) = 1$ .
- 5p** b) Igazolja, hogy  $A(2) \cdot A(1) + 3A(-2) = 16I_2$ .
- 5p** c) Határozza meg azt az  $m$  nullától különböző egész számot, amelyre a  $B(m) = \frac{1}{m} A(-m)$  mátrix az  $A(m)$  mátrixnak az inverz mátrixa!
2. Adott az  $f = X^3 - 3X^2 - 3X + a$  polinom, ahol  $a$  valós szám.
- 5p** a) Ha  $a = 1$ , igazolja, hogy  $f(-1) = 0$ .
- 5p** b) Határozza meg azt az  $a$  valós számot, amelyre teljesül a  $3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_1x_2x_3 = 3$  egyenlőség, ahol  $x_1$ ,  $x_2$  és  $x_3$  az  $f$  polinom gyökei!
- 5p** c) Ha  $a = 9$ , határozza meg az  $f$  polinom gyökeit!

**III. FELADATSOR**

**(30 pont)**

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - 8}{e^x}$  függvény.
- 5p** a) Igazolja, hogy  $f'(x) = \frac{(x+2)(4-x)}{e^x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Határozza meg az  $f$  függvény grafikus képén elhelyezkedő  $x = 0$  abszcisszájú pontban az  $f$  függvény grafikus képéhez húzott érintő egyenletét!
- 5p** c) Bizonyítsa be, hogy  $-4e^2 \leq f(x) \leq e^3$ , bármely  $x \in [-3, 4]$  esetén!
2. Adott az  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 6x + \frac{2 \ln x}{x}$  függvény.
- 5p** a) Igazolja, hogy  $\int_2^3 \left( f(x) - \frac{2 \ln x}{x} \right) dx = 15$ .
- 5p** b) Igazolja, hogy  $\int_1^e (f(x) - 6x) dx = 1$ .

---

|           |  |
|-----------|--|
| <b>5p</b> | <b>c)</b> Határozza meg azt az $a$ valós számot, amelyre $\int_1^{e^2} \left( \frac{f(x)}{x} + f'(x) \ln x \right) dx = af(e^2)$ . |
|-----------|--|

---