

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”**Etapă județeană****08 martie 2025****Clasa a XII –a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică****Subiectul 1**

Fie $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{X(a) = I_2 + aA, \text{ unde } a \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}\}$.

- Demonstrați că $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + 2ab)$, $\forall X(a), X(b) \in G$.
- Admitem că (G, \cdot) este grup abelian. Aflați numărul real m astfel încât funcția $f: (\mathbb{R}^*, \cdot) \rightarrow (G, \cdot)$, $f(x) = X(\frac{x+m}{2})$ este izomorfism de grupuri.
- Câte perechi de numere întregi de forma (a, b) există, astfel încât $X(a)X(b) = X(5)$?

Subiectul 2

Pe mulțimea \mathbb{Z}_6 se definesc legile de compoziție $x \circ y = x + y + \hat{3}$ și $x * y = xy + \hat{3}x + \hat{3}y$.

- Să se demonstreze distributivitatea legii de compoziție “*” față de legea de compoziție “o”.
- Să se verifice dacă tripletul $(\mathbb{Z}_6, \circ, *)$ este inel comutativ.
- Să se rezolve în \mathbb{Z}_6 sistemul de ecuații
$$\begin{cases} x * \hat{2} = \hat{2}y + \hat{3} \\ x \circ y = \hat{5} \end{cases}$$
.

Subiectul 3

Se consideră $I_n = \int_0^1 (x - x^2)^n dx$, pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- Să se calculeze I_1 .
- Să se arate că $I_n = \frac{n}{2(2n+1)} I_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
- Să se demonstreze că $0 \leq I_n \leq \frac{1}{4^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Subiectul 4

În urma unui studiu referitor la memoria elevilor, s-a constatat că numărul de cuvinte noi din vocabularul limbii franceze memorate de un elev în t minute de la începerea unei ore de clasă este dat de $[M(t)]$, partea întreagă a lui $M(t)$, unde $M(t) = |f(t)|$, iar $f: [0, 50] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă care verifică pentru orice $t \in [0, 50]$ relația $f'(t) = 0,003t^2 - 0,16t$.

- Aflați funcția f și numărul de cuvinte memorate de un elev în primele 10 minute ale unei ore de limba franceză.
- Demonstrați că numărul de cuvinte noi memorate de un elev crește pe parcursul unei ore de clasă și determinați câte cuvinte noi memorează un elev în ultimele 20 minute dintr-o oră de clasă, cu durată de 50 minute.

Timp de lucru: 3 ore.**Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.**