

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”**Etapă județeană****08 martie 2025****XII. osztály – H1 – Szakközép****1. Feladat**

Adott az $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$ mátrix és a $G = \{X(a) = I_2 + aA, \text{ unde } a \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}\}$ halmaz.

- Igazold, hogy $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + 2ab)$, $\forall X(a), X(b) \in G$ esetén!
- Tudva, hogy (G, \cdot) egy Ábel-féle csoport, határozd meg az m valós számot úgy, hogy az $f: (\mathbb{R}^*, \cdot) \rightarrow (G, \cdot), f(x) = X(\frac{x+m}{2})$ függvény egy csoportizomorfizmus legyen!
- Hány (a, b) alakú egész számpár létezik, amelyre $X(a)X(b) = X(5)$?

2. Feladat

A \mathbb{Z}_6 halmazon értelmezzük az $x \circ y = x + y + \hat{3}$ és $x * y = xy + \hat{3}x + \hat{3}y$ műveleteket.

- Igazold, hogy a “*” művelet disztributív a “ \circ ” műveletre nézve!
- Ellenőrizd, hogy a $(\mathbb{Z}_6, \circ, *)$ struktúra egy kommutatív gyűrű!
- Oldd meg \mathbb{Z}_6 -ban az $\begin{cases} x * \hat{2} = \hat{2}y + \hat{3} \\ x \circ y = \hat{5} \end{cases}$ egyenletrendszert!

3. Feladat

Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén adott az $I_n = \int_0^1 (x - x^2)^n dx$ szám.

- Számítsd ki I_1 értékét!
- Igazold, hogy $I_n = \frac{n}{2(2n+1)} I_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ esetén!
- Igazold, hogy $0 \leq I_n \leq \frac{1}{4^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

4. Feladat

Egy olyan felmérés alapján, amellyel a tanulók memóriáját mérték megállapították, hogy egy tanuló által egy tanóra kezdetétől t perc alatt megtanult új francia nyelvű szavak számát az $[M(t)]$ kifejezés adja ($M(t)$ egész része), ahol $M(t) = |f(t)|$ és $f: [0, 50] \rightarrow \mathbb{R}$ egy deriválható függvény, amely bármely $t \in [0, 50]$ esetén teljesíti az $f'(t) = 0,003t^2 - 0,16t$ összefüggést.

- Határozd meg az f függvényt és egy franciaóra első tíz percében egy tanuló által megtanult új szavak számát!
- Bizonyítsd be, hogy egy tanuló által megtanult új szavak száma növekvő tendenciát mutat egy tanóra alatt és határozd meg, hogy hány új szót tanul meg egy tanuló az 50 perces tanóra utolsó 20 percében!

Timp de lucru: 3 ore.**Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.**