

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”**Etapa județeană****08 martie 2025****Clasa a XI –a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică****Subiectul 1**

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M_a = I_2 + aA$, unde a este număr real.

- Arătați că $5M_3 - 4M_{-1} = M_{19}$.
- Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea M_a este inversabilă.
- Determinați valorile reale ale lui a pentru care $M_a \cdot M_a = M_0$.

Subiectul 2

Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ și $g(x) = x^3 + x^2 + 2x$.

- Arătați că numărul $C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+f(x)} - \sqrt{f(x)}}{x}$ este rațional.
- Să se determine abscisa pozitivă a punctului de pe graficul funcției $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = g(x) - f(x)$, în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta d de ecuație $y = 5x + 1$.
- Demonstrați că ecuația $g(x) = f(x) + 3$ are o soluție reală unică aflată în intervalul $(1; 2)$.

Subiectul 3.

Prețul de vânzare (măsurat în bitcoin) al unor acțiuni a fost urmărit începând de la momentul 1 (când au fost plasate pe piață la bursa de la New York) până la momentul T (când s-au epuizat). Prețul maxim de vânzare a fost atins la momentul t_0 . Prețul acțiunilor a înregistrat o variație dată de funcția

$$P: [1; T] \rightarrow (0, 3], P(t) = \begin{cases} 2^t - 1, & 1 \leq t \leq t_0 \\ 4 - \sqrt{t - a}, & t_0 < t \leq T \end{cases} \text{ unde } a \in \mathbb{R}, t \text{ este timpul de tranzacționare măsurat}$$

în ore, iar t_0 este momentul la care prețul de vânzare atinge pragul maxim de 3 bitcoin.

- Găsiți t_0 .
- Să se găsească $a \in \mathbb{R}$ știind că în prețul tranzacționării acțiunilor nu s-a înregistrat nici un moment de discontinuitate.
- Pentru $a = 1$, aflați T știind că prețul ultimei acțiuni a fost egal cu prețul de la momentul plasării pe piață.

Subiectul 4.

O firmă de construcții realizează planul unei autostrăzi între localitățile A și B cu coordonatele $(20, 30)$, respectiv $(60, 110)$ unde 1 u.m. pe schița cadastrală reprezintă 1 km real. Autostrada va asigura drumul cel mai scurt între cele două localități și va traversa o zonă cu pădure.

- Să demonstreze că localitatea M , cu coordonatele $(30, 50)$ se află pe traseul de construcție al viitoarei autostrăzi.
- Știind că zona împădurită este situată de o parte și de alta a autostrăzii și este delimitată de punctele M , $N(a, 70)$ și $P(50, 60)$ pe schița cadastrală, aflați parametrul real a știind că suprafața pădurii este de 250 km^2 .

Timp de lucru: 3 ore.**Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7**