



**Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa județeană**

08 martie 2025

Clasa a XII –a – Secțiunea H2 - Profil real, specializarea științe ale naturii

1. Aufgabe

Gegeben sind $G_k = (-k, k)$, $k > 0$ und die Verknüpfung $x * y = \frac{k^2(x+y)}{k^2+xy}$, $\forall x, y \in G_k$.

- a) Beweise, dass G_k ein stabiler Teil von \mathbb{R} in Bezug auf die Verknüpfung „ $*$ “ ist.
- b) Beweise, dass die Verknüpfung „ $*$ “ assoziativ ist.
- c) Wenn bekannt ist, dass $(G_k, *)$ eine abelsche Gruppe ist, soll gezeigt werden, dass die

Funktion $f: G_1 \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ ein Isomorphismus der Gruppen $(G_1, *)$ und $((0, +\infty), \cdot)$ ist.

- d) Bestimme die natürliche Zahl n , für welche in der abelschen Gruppe $(G_1, *)$ die Gleichung

$$\frac{1}{7} * \frac{1}{17} * \frac{1}{31} * \dots * \frac{1}{2n^2-1} = \frac{506}{1519} \text{ gilt.}$$

2. Aufgabe

Sei $I_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x^2+1} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Berechne I_1, I_2 .
- b) Zeige, dass $I_1 + I_3 + I_5 + \dots + I_{2025}$ eine irrationale Zahl ist.
- c) Vergleiche I_n mit I_{n+2} und berechne $[2000 \cdot I_{50}]$, wobei $[a]$ der ganze Teil der reellen Zahl a ist.

3. Aufgabe

Gegeben sind $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = (x+1) \cdot (x+2) \cdot \dots \cdot (x+2n)$, $n \in \mathbb{N}^*$ und $A_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

- a) Berechne A_1 .
- b) Berechne $\int_1^e \frac{f_1(x)}{x+1} \ln x dx$ und $\int_1^2 \frac{f_1(x)}{(x+1)(x^2+4x)} dx$.



- c) Zeige, dass $(2n+1) \cdot A_n < \left(\frac{2n+3}{2}\right)^{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

4. Aufgabe

Maria schreibt die Zahlen 1, 2, 3, ..., 2025 auf eine Tafel. Sie löscht jeweils zwei beliebige

Zahlen x und y und ersetzt sie durch $x * y = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}}$. Sie wiederholt dieses Verfahren so

lange, bis eine einzige Zahl an der Tafel übrigbleibt.

- a) Falls Maria beim ersten Schritt die Zahlen 2 und 3 löscht, berechne die Zahl, die sie dafür einsetzt.
- b) Falls Maria die Zahlen a und b durch die Zahl c ersetzt, dann gilt: $\frac{1}{c} + 1 = \left(\frac{1}{a} + 1\right) \left(\frac{1}{b} + 1\right)$.
- c) Wenn zu einem bestimmten Zeitpunkt die Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n, n \in \mathbb{N}^*, n \leq 2025$ an der Tafel stehen, zeige dass der Ausdruck $E = \left(\frac{1}{x_1} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{x_2} + 1\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{x_n} + 1\right)$ invariant ist (sich nicht verändert, falls zum Beispiel x_1, x_2 durch $x_1 * x_2$ ersetzt wird).
- d) Bestimme die Zahl, die nach 2024 Schritten übrigbleibt.

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.