



Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”

Etapă județeană

08 martie 2025

XI. osztály - H2 - Természettudomány

1. feladat.

Két $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, függvényt *barátoknak* nevezünk, ha létezik és véges a $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x))$ határérték.

- a) Igazold, hogy az $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{8x^3 - 3x^2}$ és $g(x) = -2x$ függvények *barátok*!
- b) Határozd meg az a, b ($a > 0$) valós számokat úgy, hogy az $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{ax^2 + x + 4}$ és $g(x) = -2x + b$ függvények *barátok* legyenek!
- c) Adjál példát három $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre úgy, hogy az f és h , illetve a g és h függvények *barátok*, de az f és g függvények nem *barátok*!

2. feladat.

Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \cdot \left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil - 1 & , x < 0 \\ e^x - \cos x - 1 & , x \geq 0 \end{cases}$ függvény, ahol $\left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil$, az $\frac{1}{x}$ egész részét jelöli.

Igazold, hogy:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil = 1$;
- b) Az f függvény nem rendelkezik Darboux-tulajdonsággal az $\mathbb{R} - \text{en}$!
- c) Az $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ egyenletnek végtelen sok megoldása van, amelyekből legalább egy pozitív!

3. feladat.

Egy $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ mátrixot *érdekesnek* nevezünk, ha a főátló elemeinek összege nulla.

Adott az $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ és az $M(a, b) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{C}$ mátrix.

- a) Legyen A egy *érdekes* mátrix. Igazold, hogy létezik $a, b \in \mathbb{C}$ úgy, hogy az $A - SM(a, b)S^{-1}$ mátrix főátlójának minden eleme nulla!
- b) Igazold, hogy bármely *érdekes* mátrix felírható három nilpotens mátrix összegeként.
(Egy $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ mátrixot nilpotensnek nevezünk, ha létezik $n \in \mathbb{N}^*$ úgy, hogy $X^n = O_3$.)
- c) Adjál példát három olyan $X, Y, Z \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ mátrixra, amelyekre teljesülnek az $X + Y + Z = B$ és

$X^3 = Y^3 = Z^3$ összefüggések, ahol $B = \begin{pmatrix} 2025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2025 \end{pmatrix}$.

4. feladat

Anna el akar ültetni a kertjébe három fát. Tegyük fel, hogy a kert területét az xOy Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer szerint adjuk meg, és a tengelyek mentén az egység 1 m.

Egy tájépítész azt javasolta, hogy az első fát ültesse az $A(3,0)$ pontban; a második fát ültesse a (d) : $4x - y - 12 = 0$ egyenletű egyenesre úgy, hogy az első fától $\sqrt{17}$ m távolságra legyen; az utolsó fát pedig ültesse a (p) : $y = x^2$ egyenletű parabola mentén.

Anna azt szeretné, hogy a három fa által meghatározott háromszög területe minimális legyen.

- a) Segítsd Annát meghatározni a három fa pontos helyét!
- b) Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyen a második és a harmadik fa helyezkedik el!

Megjegyzés: Munkaidő 3 óra. Minden feladat kötelező. Minden feladatot 0-tól 7-ig pontozunk