

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”

Etapa județeană

08 martie 2025

Clasa a XI –a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

Barem de notare și evaluare

Subiectul 1

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M_a = I_2 + aA$, unde a este număr real.

- Arătați că $5M_3 - 4M_{-1} = M_{19}$.
- Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea M_a este inversabilă.
- Determinați valorile reale ale lui a pentru care $M_a \cdot M_a = M_0$.

Soluție:

- $5M_3 - 4M_{-1} = 5(I_2 + 3A) - 4(I_2 - A) \dots\dots\dots 1p$
 $= 5I_2 + 15A - 4I_2 + 4A = I_2 + 19A = M_{19} \dots\dots\dots 1p$
- $M_a = \begin{pmatrix} 1-3a & 3a \\ -a & 1+a \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M_a) = (1-3a)(1+a) + 3a^2 = 1-2a \dots\dots\dots 1p$
 Matricea M_a este inversabilă $\Leftrightarrow \det(M_a) \neq 0 \Leftrightarrow 1-2a \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \dots\dots\dots 1p$
- $M_a \cdot M_b = I_2 + aA + bA + abA^2, A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = -2A \dots\dots\dots 1p$
 $\Rightarrow M_a \cdot M_b = M_{a+b-2ab} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \text{ deci } M_a \cdot M_a = M_0 \Leftrightarrow M_{2a-2a^2} = M_0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots 1p$
 $\Leftrightarrow 2a - 2a^2 = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ sau } a = 1 \dots\dots\dots 1p$

Subiectul 2.

Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ și $g(x) = x^3 + x^2 + 2x$.

- Arătați că numărul $C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+f(x)} - \sqrt{f(x)}}{x}$ este rațional.
- Să se determine abscisa pozitivă a punctului de pe graficul funcției $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = g(x) - f(x)$, în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta d de ecuație $y = 5x + 1$.
- Demonstrați că ecuația $g(x) = f(x) + 3$ are o soluție reală unică aflată în intervalul $(1,2)$.

Soluție:

- $C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2+1})} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \dots\dots\dots 1p$
- $h(x) = g(x) - f(x) = x^3 + 2x - 1$, este derivabilă pe \mathbb{R} deoarece conține operații cu funcții elementare, deci derivabile și va admite tangentă în orice punct de pe graficul său.....1p
 Tangenta la graficul lui h în $x = x_0$ are ecuația: $y - h(x_0) = h'(x_0)(x - x_0)$ și panta $m_1 = h'(x_0) \dots\dots\dots 1p$
 Dreapta d , de ecuație $y = 5x + 1$, are panta $m_2 = 5$, iar tangenta și d sunt paralele dacă $m_1 = m_2 \dots\dots\dots 1p$
 Din $h'(x) = 3x^2 + 2$ și $m_1 = m_2 \Rightarrow 3x_0^2 + 2 = 5 \Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$, convine $x_0 = 1 \dots\dots\dots 1p$
- Considerăm funcția $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = g(x) - f(x) - 3 \Rightarrow f_1(x) = x^3 + 2x - 4$.
 Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \Rightarrow R = \frac{f_1(x_1) - f_1(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^3 - x_2^3 + 2(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2) \cdot (x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2) + 2(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2}$
 $\Rightarrow R = \frac{(x_1 - x_2) \cdot (x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2 + 2)}{x_1 - x_2} = \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{x_2}{2}\right)^2 + 2 > 0 \Rightarrow f_1$ este strict crescătoare (sau orice altă metodă de a arăta monotonia funcției f_1) 1p

Remarcând și faptul că f_1 este continuă pe \mathbb{R} , iar $f_1(1) = -1 < 0$ și $f_1(2) = 8 > 0 \Rightarrow$ există un singur $x_0 \in (1,2)$, astfel încât $f_1(x_0) = 0$, ceea ce trebuia demonstrat1p

Subiectul 3.

Prețul de vânzare (măsurat în bitcoin) al unor acțiuni a fost urmărit începând de la momentul 1 (când au fost plasate pe piață la bursa de la New York) până la momentul T (când s-au epuizat). Prețul maxim de vânzare a fost atins la momentul t_0 . Prețul acțiunilor a înregistrat o variație dată de funcția

$$P: [1; T] \rightarrow (0,3], P(t) = \begin{cases} 2^t - 1, & 1 \leq t \leq t_0 \\ 4 - \sqrt{t-a}, & t_0 < t \leq T \end{cases} \text{ unde } a \in \mathbb{R}, t \text{ este timpul de tranzacționare măsurat în ore iar } t_0$$

este momentul la care prețul de vânzare atinge pragul maxim de 3 bitcoin.

a) Găsiți t_0 .

b) Să se găsească $a \in \mathbb{R}$ știind că în prețul tranzacționării acțiunilor nu s-a observat nici un moment de discontinuitate.

c) Pentru $a = 1$, aflați T știind că prețul ultimei acțiuni a fost egal cu prețul de la momentul plasării pe piață.

Soluție

a) $P(t_0) = 3 \Leftrightarrow 2^{t_0} - 1 = 3 \Leftrightarrow 2^{t_0} = 4 \Leftrightarrow t_0 = 2$ 2p

b) Funcția P nu are discontinuități, deci P este continuă inclusiv în $t_0 = 2$, adică vom avea1p

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 2 \\ t < 2}} P(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow 2 \\ t < 2}} (2^t - 1) = 2^2 - 1 = 3 \\ \lim_{\substack{t \rightarrow 2 \\ t > 2}} P(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow 2 \\ t > 2}} (4 - \sqrt{t-a}) = 4 - \sqrt{2-a} = 3$$
1p

Obținem $\sqrt{2-a} = 1 \Leftrightarrow a = 1$ 1p

c) La momentul epuizării pachetului $P(T) = P(1) = 2^1 - 1 = 1$ 1p

Vom avea deci $4 - \sqrt{T-1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{T-1} = 3 \Leftrightarrow T-1 = 9 \Leftrightarrow T = 10$ 1p

Subiectul 4.

O firmă de construcții realizează planul unei autostrăzi între localitățile A și B cu coordonatele $(20, 30)$, respectiv $(60, 110)$ unde 1 u.m. pe schița cadastrală reprezintă 1 km real. Autostrada va asigura drumul cel mai scurt între cele două localități și va traversa o zonă cu pădure.

a) Să demonstreze că localitatea M , cu coordonatele $(30, 50)$ se află pe traseul de construcție al viitoarei autostrăzi.

b) Știind că zona împădurită este situată de o parte și de alta a autostrăzii și este delimitată de punctele M , $N(a, 70)$ și $P(50, 60)$ pe schița cadastrală, aflați parametrul real a știind că suprafața pădurii este de 250 km².

Soluție:

a) M se află pe traseul autostrăzii $\Leftrightarrow A, M, B$ coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_M & y_M & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$ 2p

Obținem $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_M & y_M & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & 30 & 1 \\ 30 & 50 & 1 \\ 60 & 110 & 1 \end{vmatrix} = 0$, deci localitatea M se află pe traseul autostrăzii1p

b) Suprafața pădurii este dată de aria triunghiului MNP 1p

Avem $D_{MNP} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_M & y_M & 1 \\ x_N & y_N & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 30 & 50 & 1 \\ a & 70 & 1 \\ 50 & 60 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (10a - 700)$; $Aria_{MNP} = |D_{MNP}| = 250$ 1p

$\Leftrightarrow |10a - 700| = 500 \Leftrightarrow a = 120$ sau $a = 20$ 1p

Convine doar soluția $a = 20$, deoarece, pentru $a = 120$, pădurea s-ar afla doar de o parte a autostrăzii1p