



Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”

Etapa județeană

08 martie 2025

IX. osztály - H2 - Természettudomány

1. feladat.

a) Igazold, hogy $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$, bármely $x, y \in (0, +\infty)$ esetén! Mikor áll fenn az egyenlőség?

b) Ha a, b, c egy háromszög oldalainak hossza bizonyítsd be, hogy

$$2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}, \text{ ahol } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

c) Határozd meg az a, b, c oldalhosszúságú háromszög típusát tudva azt, hogy

$$\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+c-b} + \frac{1}{a+b-c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

2. feladat.

Egy n elemű $A \subset \mathbb{N}^*$ halmaz *tökéletes*, ha az elemeinek összege egyenlő az elemek számának négyzetével.

a) Határozd meg a háromelemű *tökéletes* halmazokat!

b) Igazold, hogy bármely *tökéletes* halmaz tartalmaz legalább egy páratlan számot!

c) Ha az A egy n elemű *tökéletes* halmaz, továbbá elemei egymást követő természetes számok, igazold, hogy n páratlan szám!

3. feladat.

Adott $E(k) = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{k}]$, $k \in \mathbb{N}^*$ ahol $[a]$, az a valós szám egész részét jelöli.

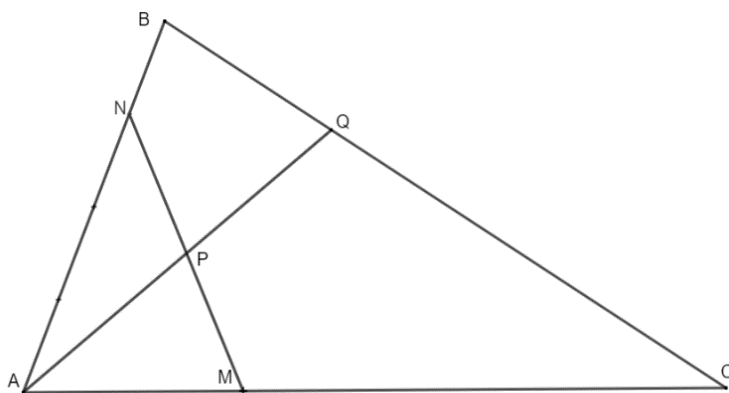
a) Számítsd ki az $E(50)$ értékét!

b) Határozd meg azt a legkisebb k természetes számot, amelyre $E(k) \geq 500$.

c) Oldd meg az $E(n^2) = m$ egyenletet, ahol m és n relatív prímek!

4. feladat.

Az alábbi ábra vázlatosan egy úthálózatot mutat be, egyenes vonalban az A, B, C, M, N, P és Q települések között. Az M település az AC úton helyezkedik el úgy, hogy $AM = 40 \text{ km}$, $MC = 80 \text{ km}$. Az N település az AB úton található úgy, hogy teljesül az $\overrightarrow{AN} + 3\overrightarrow{BN} = \vec{0}$ összefüggés. A P település az MN úton helyezkedik el, egyenlő távolságra M -től és N -től. A Q település a BC , $BC = 260 \text{ km}$ úton található úgy, hogy az A, P, Q kollineáris pontok és $CQ = k \cdot QB$, $k > 0$



- a) Igazold, hogy $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AB}$.
- b) Fejezd ki az \overrightarrow{AQ} vektort az \overrightarrow{AB} és \overrightarrow{AC} vektorok, valamint a k állandó függvényében!
- c) Határozd meg a k állandó értékét és a CQ szakasz hosszát!

Munkaidő 3 óra.

Minden feladatot 0-tól 7-ig pontozunk.