

Országos Matematikaolimpia  
Megyei forduló - 2025. március 8.

## XI. OSZTÁLY

**1. feladat.** Adott az  $(a_n)_{n \geq 1}$  sorozat úgy, hogy  $a_1 = 1$  és  $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + \sqrt{1 + a_n}}$ , bármely  $n \in \mathbb{N}^*$  esetén. Igazold, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \log_2(1 + a_k) = 2$ .

*Gazeta Matematică*

**2. feladat.** Legyen  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ . Azt mondjuk, hogy egy  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  mátrix  $(\mathcal{P})$  tulajdonságú, ha  $\det(A + X_{ij}) = \det(A + X_{ji})$  bármely  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  esetén, ahol  $X_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  az a mátrix, amelyben az  $(i, j)$  helyen 1 van és minden más eleme 0.

a) Igazold, hogy ha az  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  mátrix  $(\mathcal{P})$  tulajdonságú és  $\det(A) \neq 0$ , akkor  $A = A^T$ .

b) Adj példát egy olyan  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  mátrixra, amely  $(\mathcal{P})$  tulajdonságú, de  $A \neq A^T$ .

**3. feladat.** Adott az  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  folytonos és bijektív függvény úgy, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(f(x)/x)}{x} = 1.$$

a) Igazold, hogy  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$  és  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(ax)}{f^{-1}(x)} = 1$  bármely  $a > 0$  esetén! .

b) Adj példát egy olyan  $f$  függvényre, amely teljesíti a feladat feltételeit!

**4. feladat.** Határozd meg azokat az  $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  mátrixhármassokat, amelyekre:

$$\begin{aligned} A &= BC - CB \\ B &= CA - AC \\ C &= AB - BA \end{aligned}.$$

*Munkaidő 3 óra.*

*Minden feladatra legfeljebb 7 pont szerezhető.*