

**Examenul național de bacalaureat 2025**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Varianta 9**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

<b>1.</b>	$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{5 + 35}{2} =$ $= \frac{40}{2} = 20$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.</b>	$f(0) = 3, f(1) = 5, f(m) = 2m + 3$ , pentru orice număr real $m$ $2m + 3 = 3 \cdot 5$ , de unde obținem $m = 6$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>3.</b>	$x^2 - 4 = 3x - 6$ , de unde obținem $x^2 - 3x + 2 = 0$ $x = 1$ sau $x = 2$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>4.</b>	Mulțimea numerelor naturale de o cifră are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de o cifră sunt 6 numere $n$ pentru care $3n^2 < 100$ , deci sunt 6 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>5.</b>	$2 = \frac{0 + x_C}{2}$ și $5 = \frac{2 + y_C}{2}$ $C(4, 8)$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>6.</b>	$18 = \frac{AB \cdot AC}{2}$ , deci $AB = AC = 6$ $BC^2 = 72$ , de unde obținem $BC = 6\sqrt{2}$	<b>3p</b> <b>2p</b>

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$A(2) = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 9 - 6 \cdot (-2) =$ $= -9 + 12 = 3$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$xA(y) - A(xy) = \begin{pmatrix} x - xy & 3xy \\ -xy & x + 4xy \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 - xy & 3xy \\ -xy & 1 + 4xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 1 & 0 \\ 0 & x - 1 \end{pmatrix} =$ $= (x - 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (x - 1)I_2$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$A(1) \cdot A(x - 1) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 - x & 3x - 3 \\ -x + 1 & 4x - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 3x & 12x - 9 \\ 3 - 4x & 17x - 12 \end{pmatrix}$ , pentru orice număr real $x$ $\begin{pmatrix} 3 - 3x & 12x - 9 \\ 3 - 4x & 17x - 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x^2 & 3x^2 \\ -x^2 & 4x^2 + x \end{pmatrix}$ , de unde obținem $x = 1$ sau $x = 3$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$1 \circ 5 = \frac{1}{4}(1 + 1)(5 + 1) - 1 =$ $= 3 - 1 = 2$	<b>3p</b> <b>2p</b>

<b>b)</b>	$x \circ 3 = \frac{1}{4}(x+1)(3+1) - 1 = x + 1 - 1 = x$ , pentru orice număr real $x$	<b>2p</b>
	$3 \circ x = \frac{1}{4}(3+1)(x+1) - 1 = x + 1 - 1 = x$ , pentru orice număr real $x$ , deci $e = 3$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”	<b>3p</b>
<b>c)</b>	$\frac{1}{4}(m+1)(n+1) - 1 = 3 \Leftrightarrow (m+1)(n+1) = 16$	<b>2p</b>
	Cum $m$ și $n$ sunt numere naturale, cu $m \leq n$ , obținem perechile $(0,15)$ , $(1,7)$ și $(3,3)$	<b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x} =$	<b>3p</b>
	$= \frac{2x^2 - 3x + 1}{x} = \frac{(2x-1)(x-1)}{x}, x \in (0, +\infty)$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 3x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1 + \ln x)'}{(\ln x)'} =$	<b>3p</b>
	$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 3$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ sau $x = 1$ ; pentru orice $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ , $f'(x) \geq 0$ , deci $f$ este crescătoare pe $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ , pentru orice $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ , $f'(x) \leq 0$ , deci $f$ este descrescătoare pe $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ și, pentru orice $x \in [1, 2]$ , $f'(x) \geq 0$ , deci $f$ este crescătoare pe $[1, 2]$	<b>3p</b>
	Pentru orice $x \in (0, 1]$ și orice $y \in [1, 2]$ , rezultă $f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$ și $f(y) \leq f(2)$ și, cum $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4} - \ln 2$ și $f(2) = -3 + \ln 2$ , obținem $f(x) + f(y) \leq -\frac{21}{4}$	<b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_2^4 f(x) \sqrt{x} dx = \int_2^4 (x-1) dx = \frac{x^2}{2} \Big _2^4 - x \Big _2^4 =$	<b>3p</b>
	$= 6 - 2 = 4$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \frac{2x\sqrt{x}}{3} \Big _1^4 - 2\sqrt{x} \Big _1^4 =$	<b>3p</b>
	$= \frac{14}{3} - 2 = \frac{8}{3}$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$g(x) = \frac{\sqrt{2x}}{x-1}$ , $x \in [2, 3]$ , deci $V = \pi \int_2^3 (g(x))^2 dx = 2\pi \int_2^3 \frac{x}{(x-1)^2} dx =$	<b>2p</b>
	$= 2\pi \int_2^3 \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx = 2\pi \left(\ln(x-1) \Big _2^3 - \frac{1}{x-1} \Big _2^3\right) = \pi \ln(4e)$	<b>3p</b>