

**CONCURSUL NAȚIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE/CATEDRELOR  
VACANTE/REZERVATE DIN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR**

**15 iulie 2025**

**Probă scrisă**

**MATEMATICĂ**

**Varianța 3**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

- Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

<b>1.</b>	<b>a)</b> $g(1) = 2$ , $(f \circ g)(1) = f(2) = 4 + 2(3m + 1) + m - 1 = 7m + 5$ $7m + 5 = 12$ , de unde obținem $m = 1$	<b>3p</b> <b>2p</b>
	<b>b)</b> $h(x) = 3x^2 + 3mx + m$ , unde $m$ este număr real; $3x^2 + 3mx + m = -9x - 4$ , de unde obținem $3x^2 + (3m + 9)x + m + 4 = 0$ $\Delta = 0$ și, cum $\Delta = 9m^2 + 42m + 33$ , obținem $m = -1$ , care convine, sau $m = -\frac{11}{3}$ , care nu convine	<b>2p</b> <b>3p</b>
	<b>c)</b> $2x^2 - x + 1 > 0$ , pentru orice număr real $x$ și, cum $-1 < \frac{x^2 + (3m + 1)x + m - 1}{2x^2 - x + 1} < 1$ , obținem $\begin{cases} 3x^2 + 3mx + m > 0 \\ -x^2 + (3m + 2)x + m - 2 < 0 \end{cases}$ , pentru orice număr real $x$ $\begin{cases} 9m^2 - 12m < 0 \\ 9m^2 + 16m - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left(0, \frac{4}{3}\right) \\ m \in \left(-2, \frac{2}{9}\right) \end{cases}$ , deci $m \in \left(0, \frac{2}{9}\right)$	<b>2p</b> <b>3p</b>
	<b>2.</b> <b>a)</b> $CM$ și $BN$ sunt mediane în triunghiul $ABC$ , $CM \cap BN = \{G\}$ , deci punctul $G$ este centrul de greutate al triunghiului $ABC$ $EG \parallel BC \Rightarrow \Delta MGE \sim \Delta MCB \Rightarrow \frac{EG}{BC} = \frac{MG}{MC} = \frac{1}{3}$ ; $GF \parallel BC \Rightarrow \Delta NGF \sim \Delta NBC \Rightarrow \frac{GF}{BC} = \frac{NG}{NB} = \frac{1}{3}$ , de unde obținem $EG = GF$ , deci punctul $G$ este mijlocul segmentului $EF$	<b>2p</b> <b>3p</b>
	<b>b)</b> $EBPG$ și $GQCF$ sunt paralelograme, deci $EG = BP = CQ = \frac{BC}{3}$ $PQ = BC - BP - CQ = BC - \frac{BC}{3} - \frac{BC}{3} = \frac{BC}{3}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
	<b>c)</b> $BQ = PC = \frac{2}{3} \cdot BC$ și, cum $EF \parallel BC$ , obținem că $EBQF$ și $EPCF$ sunt paralelograme, deci $FQ \parallel AB$ , $EP \parallel AC$ și rezultă că $AEDF$ este paralelogram, unde $D$ este punctul de intersecție a dreptelor $EP$ și $FQ$ Punctul $G$ este mijlocul diagonalei $EF$ , deci punctele $A$ , $G$ și $D$ sunt coliniare, de unde obținem că dreptele $AG$ , $EP$ și $FQ$ sunt concurente în punctul $D$	<b>3p</b> <b>2p</b>

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.</b>	<b>a)</b> $z = i$ este rădăcină a polinomului $f$ , deci $f(i) = 0$ $i^4 - 2ai^3 + (3a^2 + 2)i^2 + 2i + 4 = 0 \Leftrightarrow -3a^2 + 3 + i(2a + 2) = 0$ , de unde obținem $a = -1$	<b>2p</b> <b>3p</b>
	<b>b)</b> $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2a$ , $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 3a^2 + 2$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (2a)^2 - 2(3a^2 + 2) = -2a^2 - 4$ , pentru orice număr real $a$ $-2a^2 - 4 < 0$ , pentru orice număr real $a$ , deci polinomul $f$ nu are toate rădăcinile reale, de unde obținem că polinomul $f$ are cel puțin o rădăcină $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ; cum $f \in \mathbb{R}[X]$ , obținem că $\bar{\alpha} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ este rădăcină a polinomului $f$ , deci polinomul $f$ admite cel mult două rădăcini reale, oricare ar fi numărul real $a$	<b>3p</b> <b>2p</b>
	<b>c)</b> Derivata polinomului $f = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4)$ este $f' = (X - x_2)(X - x_3)(X - x_4) + (X - x_1)(X - x_3)(X - x_4) + (X - x_1)(X - x_2)(X - x_4) + (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$ $\frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} + \frac{1}{x_3 + 1} + \frac{1}{x_4 + 1} = -\frac{f'(-1)}{f(-1)} = \frac{6a^2 + 6a + 6}{3a^2 + 2a + 5}$ , pentru orice număr real $a$ , deci $\frac{6a^2 + 6a + 6}{3a^2 + 2a + 5} = 2$ , de unde obținem $a = 2$	<b>2p</b> <b>3p</b>
	<b>2.</b> <b>a)</b> $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$ , $x \in \mathbb{R}$ ; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ sau $x = 1$ Pentru orice $x \in (-\infty, -1]$ , $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, -1]$ ; pentru orice $x \in [-1, 1]$ , $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1, 1]$ ; pentru orice $x \in [1, +\infty)$ , $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1, +\infty)$	<b>2p</b> <b>3p</b>
	<b>b)</b> $f(x) \geq 0$ , pentru orice număr real $x$ , deci $\mathcal{A} = \int_{-a}^a  f(x)  dx = \int_{-a}^a f(x) dx =$ $= \int_{-a}^a \frac{2(x^2 + 1) + x}{x^2 + 1} dx = 2x \Big _{-a}^a + \frac{1}{2} \cdot \ln  x^2 + 1  \Big _{-a}^a = 4a$ , de unde obținem $4a = 8$ , deci $a = 2$	<b>2p</b> <b>3p</b>
	<b>c)</b> Cum $f(-1) = \frac{3}{2}$ , obținem $f(x) \geq \frac{3}{2}$ , pentru orice $x \in [-1, 1]$ , deci $(f(x))^n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n$ , pentru orice număr natural nenul $n$ $I_n = \int_{-1}^1 (f(x))^n dx \geq \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2}\right)^n dx = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$ și, cum $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ , obținem $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$	<b>2p</b> <b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<i>Itemul de completare elaborat:</i>	
- menționarea competenței specifice evaluate	<b>1p</b>
- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat	<b>1p</b>
- precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item	<b>1p</b>
- precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item	<b>1p</b>

- respectarea formatului itemului	1p
- respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat	1p
<i>Itemul cu răspuns scurt elaborat:</i>	
- menționarea competenței specifice evaluate	1p
- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat	1p
- precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item	1p
- precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item	1p
- respectarea formatului itemului	1p
- respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat	1p
<i>Itemul de tip alegere multiplă elaborat:</i>	
- menționarea competenței specifice evaluate	1p
- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat	1p
- precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item	1p
- precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item	1p
- respectarea formatului itemului	1p
- respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat	1p
<i>Itemul de tip întrebare structurată elaborat:</i>	
- menționarea competenței/competențelor specifice evaluate	1p
- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat	1p
- precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item	1p
- precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item	1p
- respectarea formatului itemului	1p
- respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat	1p
<i>Itemul de tip rezolvare de probleme elaborat:</i>	
- menționarea competenței specifice evaluate	1p
- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat	1p
- precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item	1p
- precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item	1p
- respectarea formatului itemului	1p
- respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat	1p